TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
KHOA KỸ THUẬT VÀ CÔNG NGHỆ

TS. NGUYỄN VÔN DIM (chủ biên),
TS. BÙI VĂN TÙNG, THS. NGUYỄN THÙY DUNG, THS. MAI THỊ KIM ANH

GIÁO TRÌNH
MÔ HÌNH HÓA & ĐIỀU KHIỂN ROBOT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
NĂM 2025

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

CHƯƠNG 1. GIỚI THIỆU CHUNG 11

1.1. Giới thiệu 11

1.2. Lịch sử phát triển của robot 12

1.3. Cấu trúc của robot 13

1.3.1. Khâu 13

1.3.2. Khớp 14

1.3.3. Cánh tay robot 15

1.3.4. Cổ tay 15

1.3.5. Khâu chấp hành cuối 16

1.3.6. Cơ cấu chấp hành 16

1.3.7. Cảm biến 16

1.3.8. Bộ điều khiển 16

1.4. Phân loại robot 17

1.4.1. Hình học 17

1.4.2. Không gian làm việc 20

1.4.3. Điều khiển cơ cấu chấp hành 21

1.4.4. Điều khiển 21

1.4.5. Ứng dụng 22

1.5. Quá trình mô hình hóa và mô phỏng 22

1.5.1. Một số khái niệm 22

1.5.2. Chu trình thực hiện 23

1.5.3. Phương pháp mô hình hóa 25

1.6. Bài tập 27

CHƯƠNG 2. ĐỘNG HỌC ROBOT 28

2.1. Giới thiệu 28

2.2. Động học quay 30

2.2.1. Quay quanh các trục toạ độ toàn cục 30

2.2.2. Phép quay liên tiếp quanh các trục tọa độ Descartes toàn cục 33

2.2.3. Góc Roll-Pitch-Yaw toàn cục 35

2.2.4. Phép quay quanh trục tọa độ Descartes cục bộ 37
2.2.5. Quay liên tiếp quanh các trục tọa độ cục bộ 39
2.2.6. Góc Euler 40
2.2.7. Góc Roll-Pitch-Yaw cục bộ 44
2.2.8. Phép quay trục cục bộ so với trục toàn cục 45
2.2.9. Biến đổi tổng quát 46
2.2.10. Biến đổi bị động và chủ động 49
2.2.11. Bài tập *50*
2.3. Động học hướng 52
2.3.1. Quay trục - góc *52*
2.3.2. Tham số Euler 56
2.3.3. Xác định các tham số Euler 58
2.3.4. Spinor và Rotator 60
2.3.5. Bài tập 62
2.4. Động học chuyển động 63
2.4.1. Chuyển động của vật thể rắn 63
2.4.2. Biến đổi đồng nhất 67
2.4.3. Biến đổi đồng nhất nghịch 74
2.4.4. Biến đổi đồng nhất hợp thành 78
2.4.5. Tọa độ vít 87
2.4.6. Bài tập 91
2.5. Động học thuận 93
2.5.1. Ký hiệu Denavit-Hartenberg 94
2.5.2. Biến đổi giữa hai hệ tọa độ lân cận 102
2.5.3. Động học vị trí thuận của robot 114
2.5.4. Khớp cổ tay cầu 124
2.5.5. Động học lắp ráp 132
2.5.6. Bài tập 142
2.6. Động học ngược 147
2.6.1. Phương pháp phân tách 147
2.6.2. Phương pháp biến đổi ngược 161
2.6.3. Phương pháp lặp 170
2.6.4. Bài tập 175
2.7. Động học vận tốc 177

2.7.1. Vận tốc khâu cứng 177
2.7.2. Động học vận tốc thuận 180
2.7.3. Vector tạo ma trận Jacobian 186
2.7.4. Động học vận tốc ngược 195
2.7.5. Bài tập 201
2.8. Động học gia tốc 203
2.8.1. Vector và ma trận vận tốc góc 203
2.8.2. Vector và ma trận gia tốc góc 205
2.8.3. Gia tốc vật thể rắn 209
2.8.4. Ma trận biến đổi gia tốc 212
2.8.5. Động học gia tốc thuận 216
2.8.6. Động học gia tốc ngược 219
2.8.7. Bài tập 221

CHƯƠNG 3. ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT 223
3.1. Giới thiệu 223
3.2. Động lực học chuyển động 224
3.2.1. Lực và moment 224
3.2.2. Động năng dịch chuyển của vật thể rắn 229
3.2.3. Động năng quay của vật thể rắn 229
3.2.4. Ma trận mômen quán tính khối lượng 235
3.2.5. Biểu thức Lagrange của phương trình Newton 241
3.2.6. Cơ học Lagrange 243
3.2.7. Bài tập 247
3.3. Động lực học robot 248
3.3.1. Động lực học Newton-Euler của khâu cứng 248
3.3.2. Động lực học Lagrange cho robot 254
3.3.3. Phương trình Lagrange và ma trận biến đổi khâu 260
3.3.4. Tĩnh học Robot 265
3.3.5. Bài tập 269

CHƯƠNG 4. ĐIỀU KHIỂN ROBOT 272
4.1. Giới thiệu 272
4.2. Lập kế hoạch đường đi 272

4.2.1. Đường đi bậc ba 273
4.2.2. Đường đa thức 277
4.2.3. Lập kế hoạch đường đi phi đa thức 286
4.2.4. Chuyển động của cánh tay robot thông qua đường dẫn khớp 288
4.2.5. Đường đi Descartes 292
4.2.6. Đường đi quay 294
4.2.7. Chuyển động tay máy theo đường đi của khâu chấp hành cuối 296
4.2.8. Bài tập 299
4.3. Các kỹ thuật điều khiển 300
4.3.1. Điều khiển vòng hở và vòng kín 300
4.3.2. Điều khiển mô-men xoắn 306
4.3.3. Kỹ thuật điều khiển tuyến tính 309
4.3.4. Bài tập 312
TÀI LIỆU THAM KHẢO 313

CÁC TỪ VIẾT TẮT

TT	Từ viết tắt	Ý nghĩa của từ
1	SCARA	Selective Compliance Assembly Robot Arm
2	DH	Denavit - Hartenberg
3	RPY	Roll - Pitch - Yaw
4	AGV	Automatic Guided Vehicles
5	CNC	Computer Numerical Control
6	DOF	Degree Of Freedom
7	SRMS	Shuttle Remote Manipulator System

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

TT	Thuật ngữ	Diễn giải ý nghĩa
1	Hàm Signum (với tên gọi khác là hàm dấu)	là một hàm số của số thực trong tập hợp sau {-1, 0, 1}. Hàm Signum được định nghĩa như sau: $$sgn = \begin{matrix} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{matrix}$$ Hàm signum với x khác 0 có thể được định nghĩa là đạo hàm của hàm giá trị tuyệt đối của x: $$sgn(x) = \frac{d}{dx}\lvert x\rvert, x \neq 0$$
2	Span tuyến tính (hay bao tuyến tính hay gọi tắt là span) của một tập hợp vector *S* (từ một không gian vector), ký hiệu span(*S*)	là không gian con tuyến tính nhỏ nhất chứa tập hợp vector đó. Điều này thường được sử dụng để chỉ tất cả các tổ hợp tuyến tính có thể tạo ra từ các vector trong *S*. Cụ thể, span(*S*) bao gồm tất cả các vector có thể tạo ra bằng cách lấy tổ hợp tuyến tính của các vector trong *S*. Nó là không gian con tuyến tính nhỏ nhất mà *S* thuộc về đó.
3	Khớp	Hai khâu được nối với nhau thông qua khớp mà khi chuyển động tương quan có thể biểu diễn bởi một hệ trục.
4	Bậc tự do của robot	Số bậc tự do của robot chính là khả năng chuyển động của robot trong hệ tọa độ gắn liền với điểm tham chiếu.

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm qua, lĩnh vực robot đã kích thích sự quan tâm ngày càng tăng của nhiều học giả, nhiều tài liệu đã được xuất bản, cả về giáo trình và sách chuyên khảo, cũng như các tạp chí chuyên ngành dành riêng cho robot. Sự quan tâm mạnh mẽ này cũng có thể được giải thích bởi tính liên ngành của lĩnh vực robot, là một khoa học có nguồn gốc từ các lĩnh vực khác nhau: cơ học, điện, điện tử, điều khiển tự động, toán học và khoa học máy tính.

Mặc dù ngành học về robot vẫn là một ngành tương đối trẻ, nhưng các nền tảng của nó cũng đã được viết trong một số tài liệu, sách, giáo trình. Trong số đó, mô hình hóa và điều khiển đóng vai trò cơ bản, không chỉ trong bối cảnh truyền thống của robot công nghiệp, mà còn cho các robot di động hoặc AGV (Automatic Guided Vehicles).

Môn học "Mô hình hóa và điều khiển robot" là môn học bắt buộc thuộc khối kiến thức chuyên ngành của chương trình đào tạo Cơ điện tử. Giáo trình Mô hình hóa và điều khiển robot được tập thể giảng viên thuộc Khoa Kỹ thuật và Công nghệ - Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông biên soạn dùng cho trình độ đại học.

Nội dung giáo trình được tổ chức sao cho có thể sử dụng để giảng dạy và tự học. Bao gồm có 4 chương:

Chương 1 "Giới thiệu chung", giới thiệu các khái niệm chung ban đầu với đánh giá ngắn gọn về sự phát triển lịch sử và phân loại robot.

Chương 2 "Động học robot", trình bày động học thuận và nghịch của robot. Phân tích động học đề cập đến phân tích vị trí, vận tốc và gia tốc của robot trong không gian tọa độ khớp và cơ sở. Nó thiết lập các mối quan hệ động học giữa khâu chấp hành cuối và các biến khớp. Phương pháp Denavit-Hartenberg biểu diễn các khung tọa độ vật thể được giới thiệu và sử dụng cho phân tích động học thuận. Đối với phân tích động học ngược, khái niệm về phân tách, phương pháp ma trận ngược và kỹ thuật lặp được giới thiệu. Ngoài ra, tính toán cổ tay cầu là điều cần thiết để áp dụng các phương pháp phân tích trong động học ngược.

Chương 3 "Động lực học robot", trình bày chi tiết về động lực học của robot. Xem xét các phương pháp cơ bản và chứng minh cách chúng có thể được áp dụng cho khung tọa độ động được sử dụng cho động học robot trong chương 2. Các khái niệm về động lực học Newton-Euler, hàm Lagrange, ma trận quán tính của bộ điều khiển và lực tổng quát được giới thiệu và áp dụng để dẫn xuất các phương trình động lực học chuyển động.

Chương 4 "Điều khiển robot", giới thiệu các phương pháp lập kế hoạch đường đi của robot và các kỹ thuật điều khiển được giới thiệu. Kết quả của các kỹ thuật được áp dụng cho thuật toán điều khiển vòng lặp hở. Sau đó, phương pháp moment xoắn tính toán được giới thiệu, trong đó kết hợp của tín hiệu phản hồi thuận và phản hồi nghịch được sử dụng để hiện thực hóa động lực học sai số hệ thống.

Mặc dù tập thể tác giả đã dành nhiều thời gian và công sức để biên soạn, song khó tránh khỏi thiếu sót. Vậy, chúng tôi kính mong quý thầy/cô, các nhà khoa học và các bạn sinh viên đóng góp ý kiến để giáo trình được hoàn thiện trong lần tái bản.

Xin trân trọng cảm ơn.

Thay mặt tập thể tác giả biên soạn

TS. Nguyễn Vôn Dim

CHƯƠNG 1. GIỚI THIỆU CHUNG

Mục tiêu cần đạt được của chương 1:

- Biết được lịch sử phát triển của robot công nghiệp;
- Biết được các thành phần cơ bản và cấu trúc của một robot;
- Hiểu được nguyên lý hoạt động và các chức năng của robot;
- Phân loại và chọn lựa robot cho các ứng dụng cụ thể;
- Hiểu được quá trình mô hình hóa và chu trình thực hiện.

1.1. Giới thiệu

Luật số không: Một robot không được gây tổn hại cho con người, hoặc để con người gặp nguy hiểm.

Luật số một: Một robot không được gây tổn hại cho con người, hoặc để con người gặp nguy hiểm, trừ khi điều này vi phạm một luật cao hơn.

Luật số hai: Một robot phải tuân theo các mệnh lệnh bởi con người, trừ khi các mệnh lệnh đó xung đột với một luật cao hơn.

Luật số ba: Một robot phải bảo vệ sự tồn tại của chính nó miễn là việc bảo vệ đó không xung đột với một luật cao hơn.

Isaac Asimov đã đề xuất bốn quy tắc "robotics" được điều chỉnh này để bảo vệ chúng ta khỏi các thế hệ robot thông minh. Mặc dù chúng ta không quá xa thời điểm đó khi thực sự cần áp dụng các quy tắc của Asimov, nhưng không cần thiết ngay lập tức, mà cần có kế hoạch cho tương lai.

Thuật ngữ "robotics" chỉ việc nghiên cứu và sử dụng robot. Thuật ngữ này lần đầu được nhận định bởi Asimov vào năm 1941 qua câu chuyện khoa học viễn tưởng ngắn của ông, có tên là "Runaround" [1].

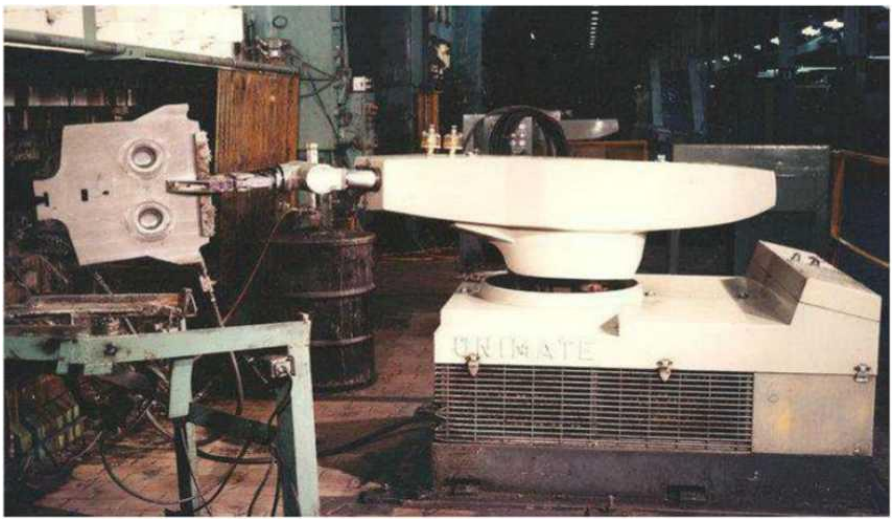
Theo định nghĩa của Viện Robot học của Mỹ (RIA): "Robot là một tay máy có thể lập trình được, có nhiều chức năng, được thiết kế để di chuyển vật liệu, phôi, dụng cụ hoặc thiết bị chuyên dụng thông qua các chuyển động được lập trình biến đổi để thực hiện một loạt các nhiệm vụ [2], [3].

Từ góc độ kỹ thuật, robot là các thiết bị phức tạp, linh hoạt bao gồm một cấu trúc cơ khí, hệ thống cảm biến và hệ thống điều khiển tự động. Cơ sở lý thuyết của robotics dựa trên kết quả nghiên cứu trong cơ học, điện, điện tử, điều khiển tự động, toán học và khoa học máy tính.

1.2. Lịch sử phát triển của robot

Công cụ điều khiển vị trí đầu tiên được phát minh vào khoảng năm 1938 để phun sơn. Tuy nhiên, các robot công nghiệp hiện đại đầu tiên là Unimates, được tạo ra bởi J. Engelberger vào đầu những năm 1960. Unimation là công ty đầu tiên đưa các robot công nghiệp thương mại hóa. Do đó, Engelberger đã được gọi là cha đẻ của ngành robot học. Vào những năm 1980, ngành công nghiệp robot phát triển rất nhanh chủ yếu là do sự đầu tư lớn của ngành công nghiệp ô tô.

Trong cộng đồng nghiên cứu, những robot tự động đầu tiên có lẽ là các thiết bị của Grey Walter (thập niên 1940) và robot "beast" của John's Hopkins. Robot có thể lập trình đầu tiên được thiết kế bởi George Devol vào năm 1954. Devol tài trợ cho Unimation. Năm 1959, robot thương mại đầu tiên xuất hiện trên thị trường. Cánh tay robot được sử dụng trong các ngành công nghiệp sau năm 1960 (Hình 1-1) và thấy sự tăng trưởng mạnh mẽ vào thập kỷ 80.



Hình 1-1 Robot công nghiệp Unimate đầu tiên của thế giới lắp đặt tại General Motors (1961) [4]

Robot xuất hiện như là kết quả của việc kết hợp hai công nghệ: điều khiển từ xa và điều khiển số bằng máy tính (CNC) của máy phay. Điều khiển từ xa được phát triển trong Thế chiến II để xử lý vật liệu phóng xạ, và CNC được phát triển để tăng độ chính xác cần thiết trong gia công các chi tiết công nghệ mới. Do đó, những con robot đầu tiên không gì khác ngoài việc điều khiển số của các liên kết cơ khí, được thiết kế chủ yếu để chuyển hàng từ điểm A đến điểm B.

Ngày nay, các ứng dụng phức tạp hơn, như hàn, sơn và lắp ráp, đòi hỏi khả năng di chuyển và cảm biến nhiều hơn. Do đó, robot là một thiết bị kỹ thuật đa ngành. Kỹ thuật cơ khí đảm nhận việc thiết kế các thành phần cơ khí, cánh tay, khâu chấp hành cuối và đảm nhiệm về phân tích điều khiển, động học và điều khiển robot. Kỹ thuật điện xử lý các bộ cảm biến, hệ thống điều khiển của robot. Kỹ thuật thiết kế hệ thống xử lý về nhận dạng, cảm biến và phương pháp điều khiển của robot. Lập trình, hoặc kỹ thuật phần mềm, chịu trách nhiệm về logic, trí tuệ nhân tạo, giao tiếp và kết nối mạng.

Hiện nay, có hơn 1000 tổ chức, hiệp hội và câu lạc bộ liên quan đến robot; hơn 500 tạp chí và bản tin liên quan đến robot; hơn 100 hội nghị và cuộc thi liên quan đến robot mỗi năm; và hơn 50 khóa học liên quan đến robot trong các trường đại học. Robot đem lại một lượng lớn ứng dụng trong

công nghiệp và được sử dụng cho các hoạt động công nghệ khác nhau. Robot nâng cao năng suất lao động trong ngành công nghiệp và giảm nhẹ công việc mệt mỏi, đơn điệu hoặc nguy hiểm. Hơn nữa, robot thực hiện nhiều hoạt động tốt hơn con người, và chúng cung cấp độ chính xác và độ lặp lại cao hơn. Trong nhiều lĩnh vực, các tiêu chuẩn công nghệ cao khó có thể đạt được mà không có sự hỗ trợ của robot. Ngoài công nghiệp, robot được sử dụng trong môi trường khắc nghiệt. Chúng có thể làm việc ở nhiệt độ thấp và cao; chúng thậm chí không cần ánh sáng, không cần nghỉ ngơi, không cần không khí trong lành, không cần lương hoặc thăng chức. Robot là những máy móc triển vọng với lĩnh vực ứng dụng đang mở rộng và cấu trúc của chúng trở nên phức tạp hơn.

Robot có khả năng thực hiện 4A trong môi trường 4D, hoặc 3D3H. Các hiệu suất 4A bao gồm tự động hóa (Automation), tăng cường (Augmentation), hỗ trợ (Assistance), và tự động (Autonomous); và môi trường 4D bao gồm nguy hiểm (Dangerous), bẩn (Dirty), nhàm chán (Dull), và khó khăn (Difficult). 3D3H có nghĩa là nhàm chán (Dull), bẩn (Dirty), nguy hiểm (Dangerous), nóng (Hot), nặng (Heavy), và nguy hiểm (Hazardous).

1.3. Cấu trúc của robot

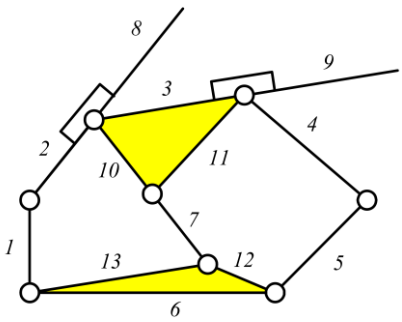
Cánh tay robot được cấu thành về mặt động học từ các khâu được kết nối bởi các khớp để tạo thành một chuỗi động học. Tuy nhiên, một robot như một hệ thống, bao gồm một tay máy hoặc xe tự hành, một cổ tay, một khâu chấp hành cuối, bộ dẫn động, cảm biến, bộ điều khiển và phần mềm.

1.3.1. Khâu

Các vật rắn riêng lẻ tạo thành một robot được gọi là các khâu. Trong ngành robot học, chúng ta đôi khi sử dụng thuật ngữ "cánh tay" để chỉ khâu. Một cánh tay robot hoặc một khâu robot là một chi tiết rắn có thể có chuyển động tương đối so với tất cả các khâu khác. Từ quan điểm động học, hai hoặc nhiều chi tiết được kết nối với nhau sao cho không có chuyển động tương đối nào có thể xảy ra giữa chúng được coi là một khâu đơn.

Ví dụ 1-1: Số lượng khâu.

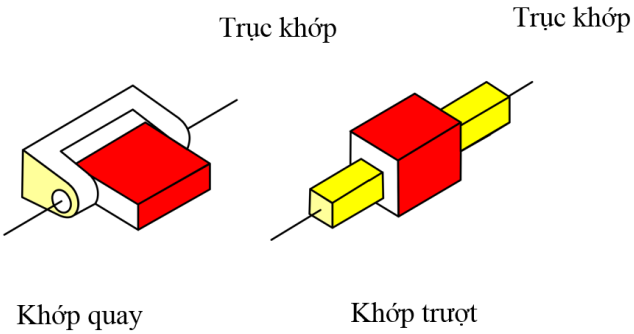
Hình 1-2 cho thấy một cơ cấu với 7 khớp. Không thể có bất kỳ chuyển động tương đối nào giữa các thanh 3, 10 và 11. Do đó, chúng được tính là một khớp, gọi là khớp 3. Các thanh 6, 12 và 13 tương tự và được tính là một khớp, gọi là khớp 6. Các thanh 2 và 8 được gắn cứng với nhau, tạo thành một khớp duy nhất, gọi là khớp 2. Các thanh 3 và 9 có mối liên kết tương tự như các thanh 2 và 8, và chúng cũng là một khớp, gọi là khớp 3.



Hình 1-2 Một cấu trúc cơ học hai vòng lặp trong mặt phẳng với 7 khớp và 8 khớp trục quay.

1.3.2. Khớp

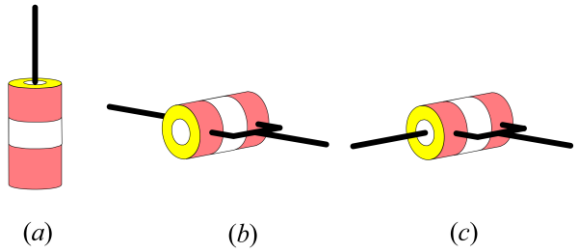
Hai khâu được kết nối thông qua tiếp xúc tại một điểm nối, mà chuyển động tương đối của chúng có thể được biểu diễn bằng một tọa độ duy nhất. Các khớp thường có kiểu quay (revolute) hoặc trượt (prismatic). Hình 1-3 mô tả hình dạng hình học của một khớp quay và một khớp trượt. Một khớp quay (R), giống như một bản lề và cho phép quay tương đối giữa hai khâu. Một khớp trượt (P), cho phép một phép dịch chuyển tương đối giữa hai khâu.



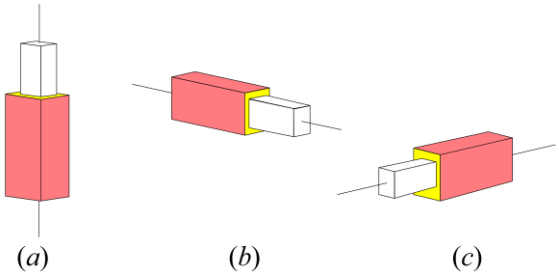
Hình 1-3 Minh họa khớp quay và khớp trượt [1].

Xoay tương đối của các khâu được kết nối bởi một khớp quay xảy ra xung quanh một đường gọi là trục của khớp. Tương tự, sự dịch chuyển của hai khâu kết nối bởi một khớp trượt xảy ra dọc theo một đường cũng được gọi là trục của khớp. Giá trị của một tọa độ mô tả vị trí tương đối của hai khâu được kết nối tại một khớp được gọi là tọa độ của khớp hoặc biến của khớp. Đó là một góc đối với một khớp quay và một khoảng cách đối với một khớp trượt.

Minh họa ký hiệu của các khớp quay và khớp trượt trong robot học được hiển thị trong Hình 1-4(a)-(c), và Hình 1-5(a)-(c) tương ứng.



Hình 1-4 Minh họa ký hiệu khớp quay trong mô hình robot.



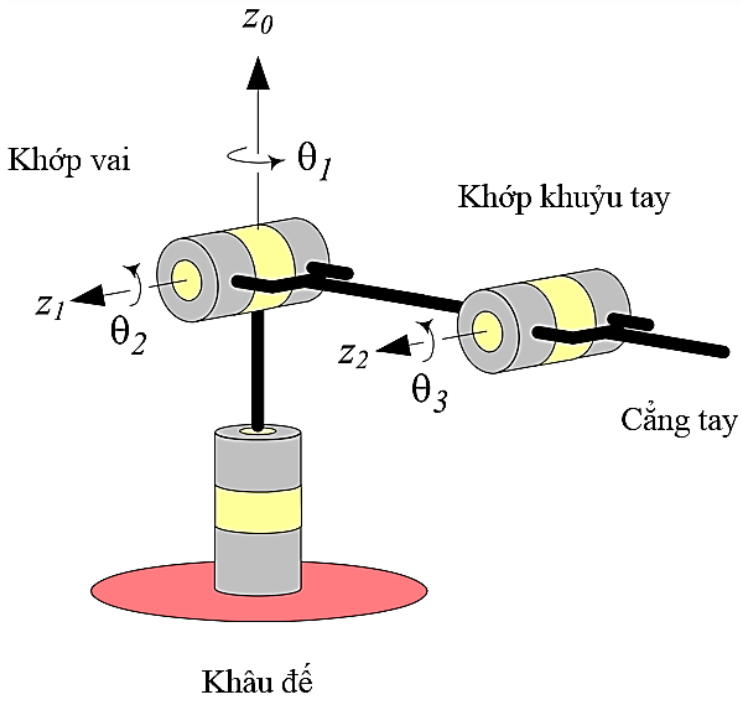
Hình 1-5 Minh họa ký hiệu khớp trượt trong mô hình robot.

Tọa độ của một khớp động được điều khiển bởi một bộ dẫn động. Một khớp bị động không có bất kỳ bộ dẫn động nào. Tọa độ của một khớp bị động là một hàm của các tọa độ của các khớp động và hình học của các cánh tay robot. Các khớp bị động cũng được gọi là các khớp không hoạt động hoặc khớp tự do.

Các khớp động thường là khớp trượt hoặc xoay, tuy nhiên, các khớp bị động có thể là bất kỳ loại khớp cấp thấp tiếp xúc bề mặt. Có sáu loại khớp cấp thấp khác nhau: xoay, trượt, trụ, vít, cầu và phẳng. Các khớp xoay và trượt là các loại khớp phổ biến nhất được sử dụng trong các cánh tay robot dạng chuỗi. Các loại khớp khác chỉ là các cách thức thực hiện để đạt được chức năng tương tự hoặc cung cấp thêm bậc tự do. Các khớp trượt và xoay cung cấp một bậc tự do. Do đó, số lượng khớp của một cánh tay robot chính là số bậc tự do (DOF) của cánh tay robot. Thông thường, cánh tay robot nên có ít nhất sáu DOF: ba để định vị trí và ba để định hướng. Một cánh tay robot có hơn sáu DOF được gọi là một cánh tay robot dư động học.

1.3.3. Cánh tay robot

Thân chính của một robot bao gồm các khâu, khớp và các yếu tố cấu trúc khác, được gọi là cánh tay robot. Một cánh tay robot trở thành một robot khi cổ tay và bàn kẹp được gắn vào, và hệ thống điều khiển được thực hiện. Tuy nhiên, trong tài liệu về robot, cả hai từ robot và cánh tay robot được sử dụng tương đương và cả hai đều chỉ đến robot. Hình 1-6 minh họa một cánh tay robot 3R.

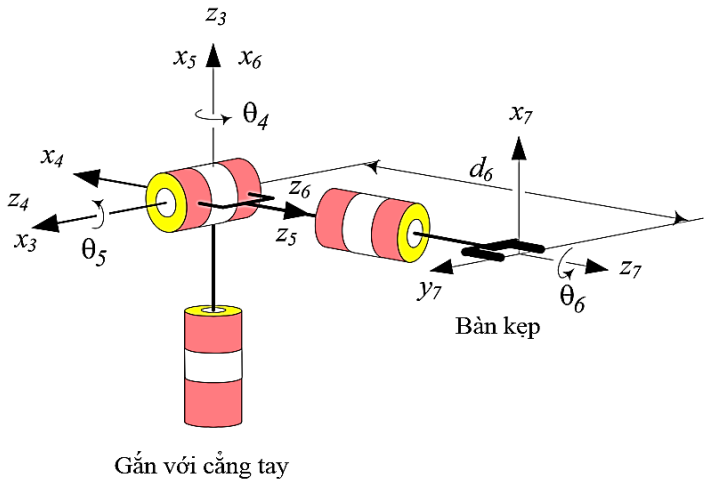


Hình 1-6 Minh hoạ cánh tay robot 3R [1].

1.3.4. Cổ tay

Các khớp trong chuỗi động học của một robot giữa cánh tay dưới và khâu chấp hành cuối được gọi là cổ tay. Thông thường, thiết kế các cánh tay robot với cổ tay cầu, có nghĩa là ba trục khớp quay giao nhau tại một điểm chung được gọi là điểm cổ tay. Hình 1-7 mô tả một cổ tay cầu, là một cơ cấu $R \vdash R \vdash R$.

Cổ tay cầu đơn giản hóa phân tích động học một cách hiệu quả, cho phép chúng ta tách biệt việc định vị trí và hướng của khâu chấp hành cuối. Do đó, cơ cấu sẽ có ba bậc tự do về vị trí, được tạo ra bởi ba khớp trong cánh tay. Số lượng bậc tự do cho hướng sẽ phụ thuộc vào cổ tay. Chúng ta có thể thiết kế một cổ tay có một, hai hoặc ba bậc tự do tùy thuộc vào ứng dụng.



Hình 1-7 Minh họa động học cổ tay cầu [1].

1.3.5. Khâu chấp hành cuối

Khâu chấp hành cuối (End-effector) là phần được lắp đặt trên khớp cuối cùng để thực hiện công việc cần thiết của robot. Khâu chấp hành cuối đơn giản nhất là một bàn kẹp, thường chỉ có khả năng thực hiện hai hành động: mở và đóng. Các bộ phận cánh tay và cổ tay của robot được sử dụng chủ yếu để định vị khâu chấp hành cuối và bất kỳ công cụ nào nó có thể mang. Thực tế là khâu chấp hành cuối hoặc công cụ mới thực hiện công việc. Một lượng lớn nghiên cứu được dành cho thiết kế của các khâu chấp hành cuối và công cụ đặc biệt. Cũng có nghiên cứu mở rộng về việc phát triển giống bàn tay người. Những bàn tay như vậy đã được phát triển cho việc sử dụng trong sản xuất. Do đó, một robot được cấu thành từ một cánh tay và một cổ tay cộng với một công cụ. Cổ tay được lắp ráp khâu chấp hành cuối cũng được gọi là một bàn tay.

1.3.6. Cơ cấu chấp hành

Bộ dẫn động hay cơ cấu chấp hành (Actuators) là các bộ điều khiển hoạt động như cơ bắp của robot để thay đổi cấu hình của chúng. Bộ dẫn động cung cấp năng lượng để tác động lên cấu trúc cơ khí chống lại trọng lực, động lực và các ngoại lực khác để thay đổi vị trí hình học của tay robot. Các bộ dẫn động có thể là loại điện, thủy lực hoặc khí nén và phải có khả năng điều khiển.

1.3.7. Cảm biến

Các linh kiện được sử dụng để phát hiện và thu thập thông tin về trạng thái bên trong và môi trường là cảm biến. Theo phạm vi của giáo trình này, vị trí khớp, vận tốc, gia tốc và lực là thông tin quan trọng nhất cần phải xác định. Các cảm biến, được tích hợp vào robot, gửi thông tin về mỗi khâu và khớp cho bộ điều khiển, và bộ điều khiển xác định cấu hình của robot.

1.3.8. Bộ điều khiển

Bộ điều khiển hoặc đơn vị điều khiển có ba vai trò.

1- Vai trò thông tin, bao gồm việc thu thập và xử lý thông tin được cung cấp bởi các cảm biến của robot.

2- Vai trò quyết định, bao gồm việc lập kế hoạch cho chuyển động hình học của cấu trúc robot.

3- Vai trò truyền thông, bao gồm việc tổ chức thông tin giữa robot và môi trường của nó. Bộ điều khiển bao gồm bộ xử lý và phần mềm.

1.4. Phân loại robot

Viện Robot học của Mỹ (RIA) xem xét rằng các lớp 3-6 trong phân loại sau được coi là robot, và Hiệp hội Robot học Pháp (AFR) kết hợp các lớp 2, 3 và 4 thành cùng một loại và chia robot thành 4 loại. Tuy nhiên, Hiệp hội Robot công nghiệp Nhật Bản chia robot thành 6 lớp khác nhau:

Lớp 1: *Thiết bị xử lý thủ công*: Một thiết bị có đa bậc tự do được kích hoạt bởi một người vận hành.

Lớp 2: *Robot có trình tự cố định*: Một thiết bị thực hiện các giai đoạn liên tiếp của một nhiệm vụ theo một chương trình được quy định và cố định.

Lớp 3: *Robot có trình tự biến đổi*: Một thiết bị thực hiện các giai đoạn liên tiếp của một nhiệm vụ theo một phương pháp được quy định nhưng có thể lập trình được.

Lớp 4: *Robot chạy lại*: Một người vận hành thực hiện nhiệm vụ bằng cách dẫn dắt robot, sau đó robot ghi lại các chuyển động để chạy lại. Robot lặp lại các chuyển động giống nhau theo thông tin đã ghi lại.

Lớp 5: *Robot điều khiển số*: Người vận hành cung cấp cho robot một chương trình chuyển động thay vì dạy nó nhiệm vụ một cách thủ công.

Lớp 6: *Robot thông minh*: Một robot có khả năng hiểu môi trường xung quanh nó và có khả năng hoàn thành một nhiệm vụ thành công mặc dù có thay đổi trong điều kiện xung quanh nhiệm vụ được thực hiện.

Ngoài các phân loại chính thức này, robot có thể được phân loại theo các tiêu chí khác như hình học, không gian làm việc, cơ cấu, điều khiển và ứng dụng.

1.4.1. Hình học

Một robot được gọi là robot chuỗi nối tiếp hoặc robot chuỗi hở nếu cấu trúc động học của nó không tạo thành một chuỗi vòng. Nó được gọi là robot song song hoặc robot chuỗi kín nếu cấu trúc của nó tạo thành một chuỗi vòng. Một robot là robot lai (hybrid) nếu cấu trúc của nó bao gồm cả chuỗi hở và chuỗi kín.

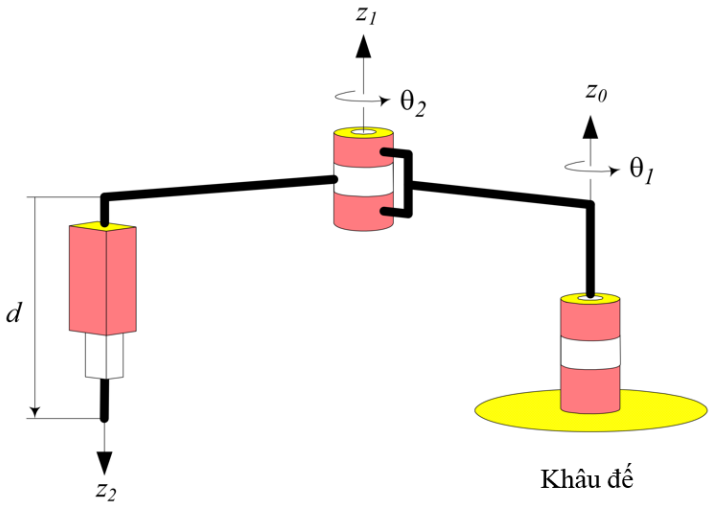
Là một hệ thống cơ khí, robot như một tập hợp các vật rắn được kết nối với nhau tại các khớp. Các khớp này có thể là khớp quay (R) hoặc khớp tịnh tiến (P), vì bất kỳ loại khớp nào khác cũng có thể được mô hình hóa như một sự kết hợp của hai loại khớp đơn giản này.

Hầu hết các cánh tay máy công nghiệp có sáu bậc tự do. Các cánh tay máy vòng hở có thể được phân loại dựa trên ba khớp đầu tiên của chúng bắt đầu từ khớp cố định. Sử dụng hai loại khớp này, có 72 cấu hình tay máy công nghiệp khác nhau, đơn giản bởi vì mỗi khớp có thể là P hoặc R, và các trục của hai khớp liền kề có thể song song ($\parallel$), trực giao ($\vdash$), hoặc vuông góc nhau ($\perp$). Hai trục khớp vuông góc gặp nhau tại một góc vuông, tuy nhiên hai trục khớp vuông góc nhau với pháp tuyến chung của chúng. Hai trục khớp vuông góc trở thành song song nếu một trục quay 90 độ quanh pháp tuyến chung. Hai trục khớp vuông góc trở thành vuông góc nếu độ dài của pháp tuyến chung giữa chúng tiến gần về không.

Trong số 72 cấu hình tay máy, những loại quan trọng bao gồm: $R \parallel R \parallel P$ (SCARA), $R \vdash R \perp R$ (có khớp nối), $R \vdash R \perp P$ (cầu), $R \parallel P \vdash P$ (hình trụ), và $P \vdash P \vdash P$ (Descartes).

1. R ∥ R ∥ P

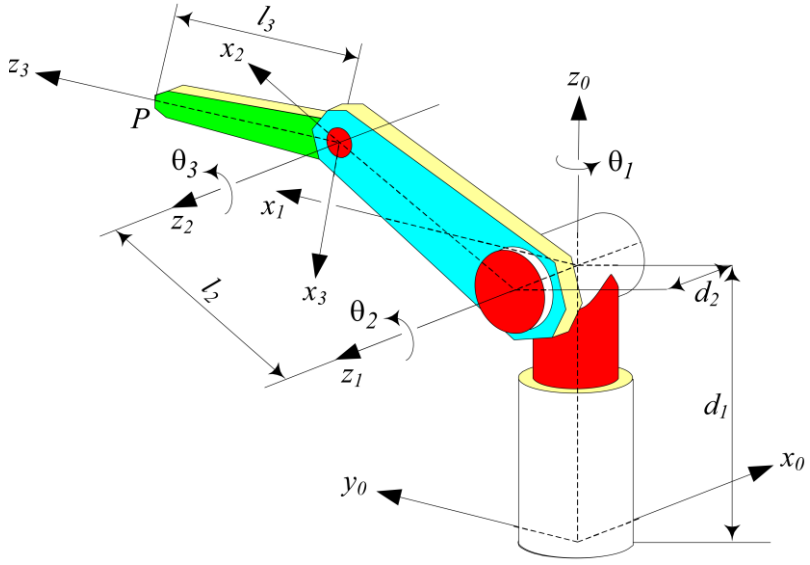
Cánh tay SCARA (Selective Compliant Articulated Robot for Assembly) được hiển thị trong Hình 1-8 là một tay máy phổ biến, như tên của nó, được thiết kế cho các hoạt động lắp ráp.



Hình 1-8 Tay máy $R \parallel R \parallel P$ [1].

2. R ⊢ R ⊥ R

Cấu hình $R \vdash R \perp R$, minh họa trong Hình 1-6, được gọi là cấu hình khuỷu tay, xoay, khớp nối hoặc phỏng sinh như tay người. Đây là cấu hình phù hợp cho các robot công nghiệp. Gần 25% số lượng robot công nghiệp, như robot PUMA, được làm từ loại này. Một minh họa khác về một robot khớp nối được hiển thị trong Hình 1-9.



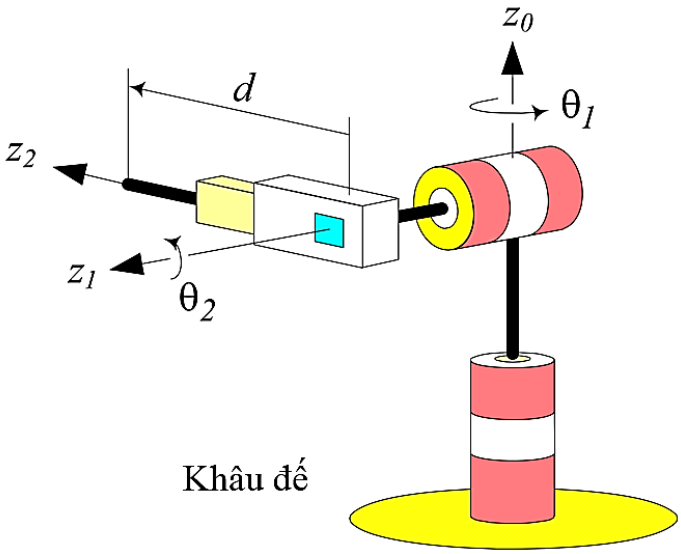
Hình 1-9 Cấu trúc của một tay cánh tay robot $R \vdash R \perp R$.

3. R ⊢ R ⊥ P

Cấu hình cầu là một cấu hình phù hợp cho các robot nhỏ. Gần 15% số lượng robot công nghiệp, ví dụ như cánh tay Stanford, được làm từ cấu hình này. Cấu hình $R \vdash R \perp P$ được minh họa trong Hình 1-10.

Bằng cách thay thế khớp thứ ba của một tay máy khớp nối bằng một khớp trượt, chúng ta thu được tay máy cấu hình cầu. Thuật ngữ "tay máy cầu" xuất phát từ việc các tọa độ cầu xác định vị trí của khâu chấp hành cuối so với khung tọa độ cơ sở của nó.

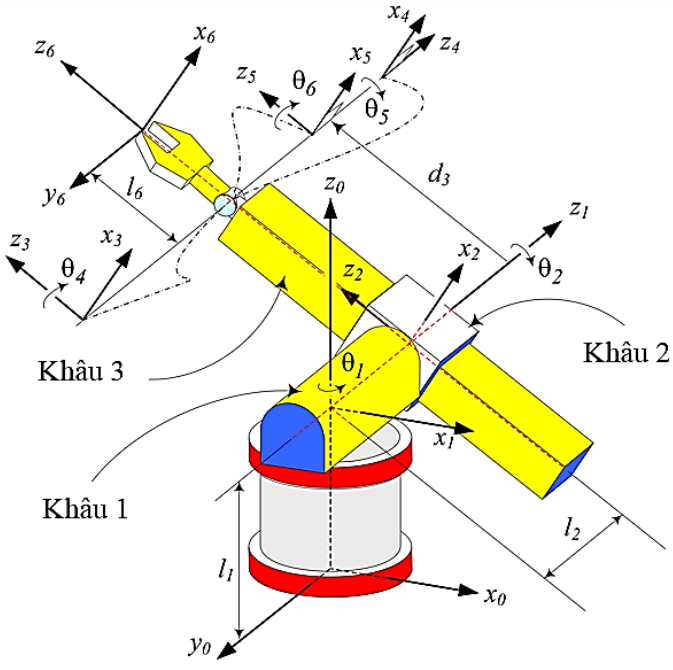
Hình 1-11 minh họa một cách tổng quan cánh tay Stanford, một trong những loại robot cầu được biết đến nhiều nhất.



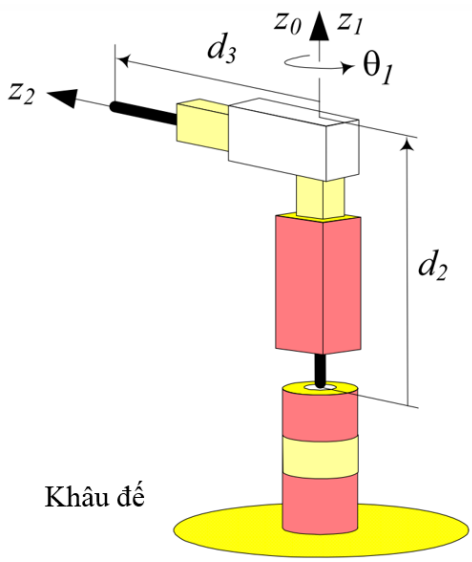
Hình 1-10 Cánh tay robot cấu hình cầu R ⊢ R ⊥ P [1].

4. R ‖ P ⊢ P

Cấu hình hình trụ là một cấu hình phù hợp cho các robot có khả năng chịu tải trung bình. Gần 45% số lượng robot công nghiệp được làm từ loại này. Cấu hình $R \parallel P \vdash P$ được minh họa trong Hình 1-12. Khớp đầu tiên của robot hình trụ là khớp xoay và tạo ra một vòng quay xoay quanh khâu đế, trong khi khớp thứ hai và thứ ba là khớp trượt. Như tên gọi, các biến số của khớp là các tọa độ hình trụ của khâu chấp hành cuối với khâu đế.



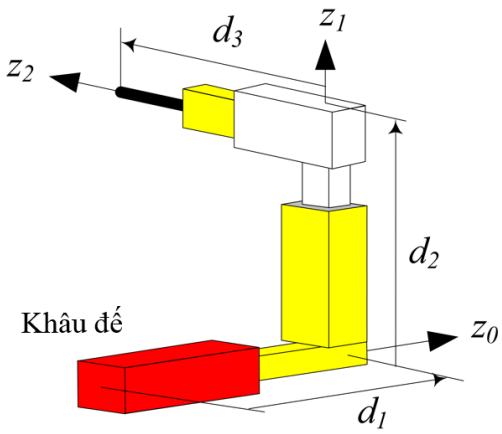
Hình 1-11 Minh họa cánh tay Stanford R ⊢ R ⊥ P [1].



Hình 1-12 Cấu hình cánh tay robot R ‖ P ⊢ P [1].

5. P ⊢ P ⊢ P

Cấu hình Descartes là một cấu hình phù hợp cho khả năng chịu tải nặng và các robot lớn. Gần 15% số lượng robot công nghiệp được làm từ cấu hình này. Cấu hình $P \vdash P \vdash P$ được minh họa trong Hình 1-13. Đối với cánh tay robot Descartes, các biến khớp là các tọa độ Descartes của khâu chấp hành cuối so với khâu đế. Mô tả động học của tay máy này là đơn giản nhất so với tất cả các tay máy khác. Các tay máy Descartes hữu ích cho các ứng dụng lắp ráp trên bàn và, như là robot cần cẩu, cho việc chuyển hàng hóa.



Hình 1-13 Cấu hình cánh tay robot Descartes P ⊢ P ⊢ P [1].

1.4.2. Không gian làm việc

Không gian làm việc của một cánh tay robot là tổng thể tích không gian mà khâu chấp hành cuối (end-effector) có thể vươn tới. Không gian làm việc bị giới hạn bởi hình học của cánh tay robot cũng như các giới hạn cơ học của các khớp. Không gian làm việc được chia thành không gian làm việc có thể vươn tới (reachable workspace) và không gian làm việc linh hoạt (dexterous workspace). Không gian làm việc có thể vươn tới là thể tích không gian trong đó mỗi điểm có thể được khâu chấp hành cuối vươn tới ở ít nhất một tư thế. Không gian làm việc linh hoạt là thể tích không gian trong đó mỗi điểm có thể được khâu chấp hành cuối vươn tới ở mọi tư thế có thể. Không gian làm việc linh hoạt là một tập con của không gian làm việc có thể vươn tới.

Hầu hết các cánh tay robot chuỗi hở đều được thiết kế với một cụm cổ tay gắn vào cụm ba khớp chính. Do đó, ba khớp đầu tiên có chiều dài lớn và được sử dụng để định vị, trong khi cổ tay được sử dụng để điều khiển và định hướng của đầu công tác. Đây là lý do tại sao cụm được tạo bởi ba khớp đầu tiên được gọi là cánh tay, và cụm được tạo bởi các khớp còn lại được gọi là cổ tay.

1.4.3. Điều khiển cơ cấu chấp hành

Các cơ cấu chấp hành chuyển hóa năng lượng thành chuyển động. Robot thường được điều khiển bằng điện, thủy lực hoặc khí nén. Các loại cơ cấu chấp hành khác có thể được xem xét bao gồm: cơ cấu chấp hành áp điện, từ giãn nở,...

Robot hoạt động bằng điện được vận hành bởi động cơ AC hoặc DC và được coi là loại robot được sử dụng nhiều nhất. Chúng sạch hơn, yên tĩnh hơn và chính xác hơn so với loại hoạt động bằng thủy lực và khí nén. Động cơ điện hoạt động hiệu quả ở tốc độ cao nên cần một hộp số tỉ số truyền cao để giảm tốc độ cao. Khả năng không thể đảo ngược và tự hãm là một lợi thế của hộp số tỉ số truyền cao trong trường hợp mất điện. Tuy nhiên, khi cần tốc độ cao hoặc khả năng tải trọng lớn, các động cơ điện không thể bằng các hệ thống dẫn động bằng thủy lực.

Bộ truyền động thủy lực là lựa chọn tốt do có tốc độ cao và tỷ lệ mô-men xoắn/khối lượng hoặc công suất/khối lượng cao. Vì vậy, các robot điều khiển bằng thủy lực chủ yếu được sử dụng để nâng các tải trọng nặng. Nhược điểm của hệ thống thủy lực, ngoài việc gây ồn và có thể bị rò rỉ dầu, còn cần có bơm và các phần cứng khác.

Robot điều khiển bằng khí nén có chi phí thấp và đơn giản nhưng không thể điều khiển chính xác. Ngoài chuyển động kém chính xác, chúng có hầu hết các ưu điểm và nhược điểm giống như robot điều khiển bằng thủy lực.

1.4.4. Điều khiển

Các robot có thể được phân loại theo phương pháp điều khiển thành các loại robot servo (điều khiển vòng lặp kín) và robot không servo (điều khiển vòng hở). Các robot servo sử dụng điều khiển máy tính vòng lặp kín để xác định chuyển động và do đó có thể biến thành các thiết bị đa chức năng có thể lập trình lại. Các robot được điều khiển bằng servo được phân loại dựa trên phương pháp mà bộ điều khiển sử dụng để dẫn hướng đường đi khâu chấp hành cuối.

Loại đơn giản nhất của một robot servo là robot điểm-điểm. Một robot điểm-điểm có thể được dạy một tập hợp các điểm rời rạc, được gọi là điểm điều khiển, nhưng không có điều khiển đường đi của khâu chấp hành cuối giữa các điểm. Ngược lại, trong các robot có đường đi liên tục, toàn bộ đường đi của khâu chấp hành cuối có thể được điều khiển. Ví dụ, khâu chấp hành cuối của robot có thể được dạy để đi theo một đường thẳng giữa hai điểm hoặc thậm chí là đi theo một đường viền như một đường hàn. Ngoài ra, tốc độ và/hoặc gia tốc của khâu chấp hành cuối thường có thể được điều khiển. Đây là những robot tiên tiến nhất và yêu cầu các bộ điều khiển máy tính và phát triển phần mềm phức tạp nhất.

Các robot không servo là các thiết bị vòng lặp hở cơ bản, chuyển động của chúng được giới hạn trong các điểm dừng cơ khí được xác định trước, và chúng chủ yếu được sử dụng cho việc vận chuyển vật liệu.

1.4.5. Ứng dụng

Bất kể kích thước, robot chủ yếu được phân loại theo ứng dụng của chúng thành hai loại: robot lắp ráp và robot không lắp ráp. Tuy nhiên, trong ngành công nghiệp, chúng được phân loại theo loại ứng dụng như tải máy, gắp và thả, hàn, sơn, lắp ráp, kiểm tra, lấy mẫu, sản xuất, y sinh học, hỗ trợ, robot di động điều khiển từ xa, và telerobot.

Theo các đặc điểm thiết kế, hầu hết các cánh tay robot công nghiệp đều có hình dạng phỏng sinh tay người, nghĩa là chúng có một "vai" (hai khớp đầu tiên), một "khuỷu" (khớp thứ ba) và một "cổ tay" (ba khớp cuối cùng). Do đó, tổng cộng, chúng thường có sáu bậc tự do cần thiết để đặt một vật thể ở bất kỳ vị trí và hướng nào.

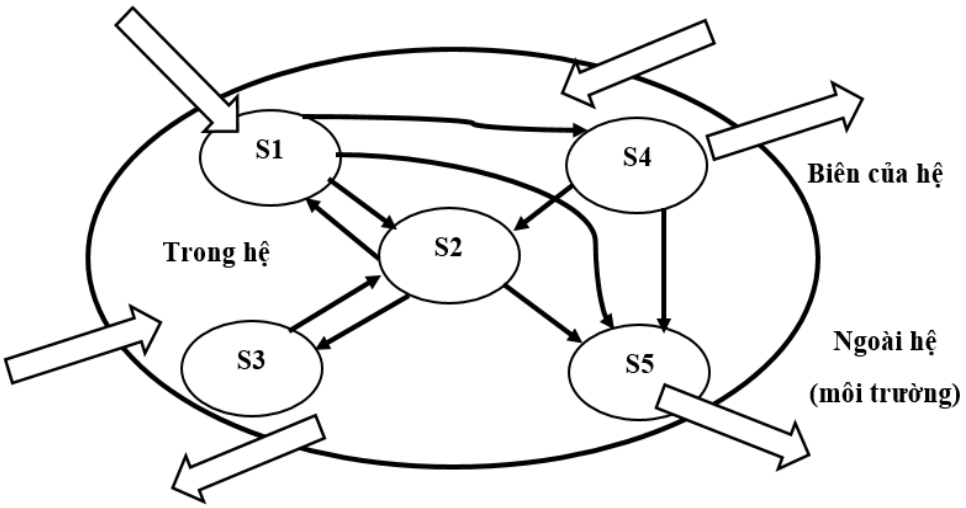
Hầu hết các robot dạng chuỗi thương mại chỉ có các khớp quay. So với các khớp trượt, các khớp quay có giá thành thấp hơn và cung cấp một không gian làm việc linh hoạt lớn hơn cho cùng một thể tích robot. Robot dạng chuỗi thường rất nặng, so với tải trọng tối đa mà chúng có thể di chuyển mà không mất đi độ chính xác. Tỷ lệ tải trọng hữu ích so với trọng lượng của chúng thường dưới 1/10. Các robot nặng vì các khâu phải cứng để hoạt động cứng vững. Sự đơn giản của động học vị trí và vận tốc thuận và ngược luôn là một trong những tiêu chí thiết kế chính cho các cánh tay robot công nghiệp. Do đó, gần như tất cả chúng đều có một cấu trúc động học đặc biệt.

1.5. Quá trình mô hình hóa và mô phỏng

1.5.1. Một số khái niệm

Một hiện tượng được gọi là một quá trình nếu trong đó có các đại lượng thay đổi theo không gian và thời gian. Một quá trình còn được định nghĩa là tập hợp các hoạt động có quan hệ lẫn nhau hoặc tương tác để biến đổi đầu vào thành đầu ra.

Hệ thống (System): là tập các đối tượng (con người, máy móc...), sự kiện mà giữa chúng có mối liên hệ nhất định. Một hệ thống được phân biệt với môi trường ngoài bằng biên của nó, trong một hệ thống có thể được phân thành nhiều hệ thống con (Hình 1-14). Trong một hệ thống các phần tử tương tác với nhau và tương tác với môi trường.



Hình 1-14 Hệ thống bao gồm các phần tử và có sự trao đổi thông tin, năng lượng và vật chất [5].

Trạng thái của hệ thống (State of a System): được mô tả bởi tập các tham số, biến số tại một thời điểm và trong điều kiện nhất định.

Hệ thống động lực (Dynamic System): là hệ thống mà các biến trạng thái của nó thay đổi theo thời gian, hay hệ thống mà tín hiệu ra không chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào hiện tại mà còn phụ thuộc tín hiệu vào và tín hiệu ra trong quá khứ. Hệ thống động lực liên tục theo thời gian sẽ được mô tả bằng các phương trình vi phân còn đối với các hệ thống động lực rời rạc theo thời gian được mô tả bởi các phương trình sai phân.

Các biến và các thông số mô tả hệ được định nghĩa bao gồm các biến độc lập (các đại lượng đầu vào) và các biến phụ thuộc đó là các biến trạng thái hoặc các biến đầu ra. Sự liên hệ giữa các biến này thể hiện cấu trúc của hệ thống.

Mô hình (Model) hay còn gọi là "mô hình thay thế" là một sơ đồ phản ánh đối tượng, con người dùng sơ đồ đó để nghiên cứu, thực nghiệm nhằm tìm ra quy luật hoạt động của đối tượng hay nói cách khác mô hình là đối tượng thay thế của đối tượng gốc để nghiên cứu về đối tượng gốc. Mô hình thay thế cần phải giữ lại được các đặc tính cốt yếu của hệ thực hoặc của hệ sẽ được tạo ra.

Trong một mô hình giải tích sự phụ thuộc của một hay nhiều biến trạng thái $x, y,$ ... theo thời gian $t,$ và vị trí r được biểu diễn dưới dạng các hàm toán học. Trong một mô hình cấu trúc, các tương tác vật lý giữa các biến trạng thái quá trình được thiết lập dựa trên cấu trúc của phần tử, trong khi đó mô hình hộp đen (black box) chỉ có mối quan hệ giữa đầu ra và đầu vào được mô tả.

Mô hình hóa (Modeling) là thay thế đối tượng gốc bằng một mô hình nhằm thu nhận các thông tin quan trọng về đối tượng bằng cách tiến hành thực nghiệm trên mô hình.

Mô phỏng (Simulation) là sự sao chép hay mô tả lại một quá trình động lực trong một mô hình, để đạt được sự hiểu biết về đối tượng thực đã có hoặc sẽ được tạo ra. Để mô phỏng chúng ta cần xây dựng được mô hình toán học mô tả quá trình động lực của hệ và các phương pháp số để tìm các lời giải. Chính vì vậy máy tính số là công cụ hữu hiệu và duy nhất để thực hiện việc mô phỏng.

Mục đích của mô hình hóa và mô phỏng là để hiểu biết, dự báo hoặc thay đổi theo định hướng mục tiêu đáp ứng của các hệ thống kỹ thuật hoặc hệ thống tự nhiên. Tính hiệu lực và đúng đắn của mô hình sẽ được kiểm chứng thông qua việc so sánh mô hình với hệ thực, tức là thông qua sự đối chiếu đáp ứng của một hệ thực với một mô hình giải tích theo một số tính chất nào đó được lựa chọn.

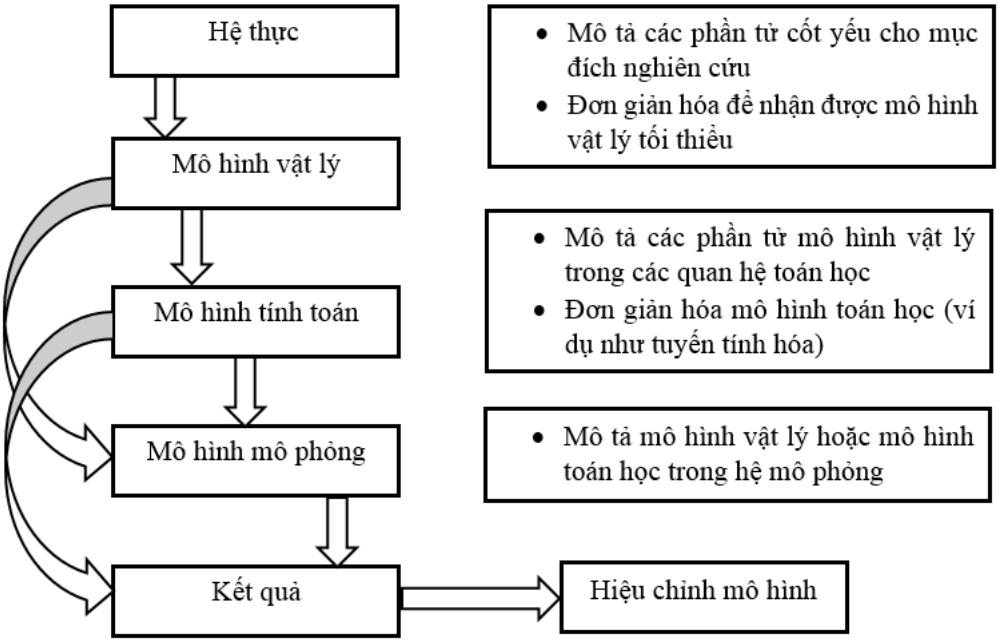
Trong mô phỏng máy tính**,** đáp ứng của một hệ thực được bắt chước nhờ công cụ máy tính dựa trên mô hình giải tích.

1.5.2. Chu trình thực hiện

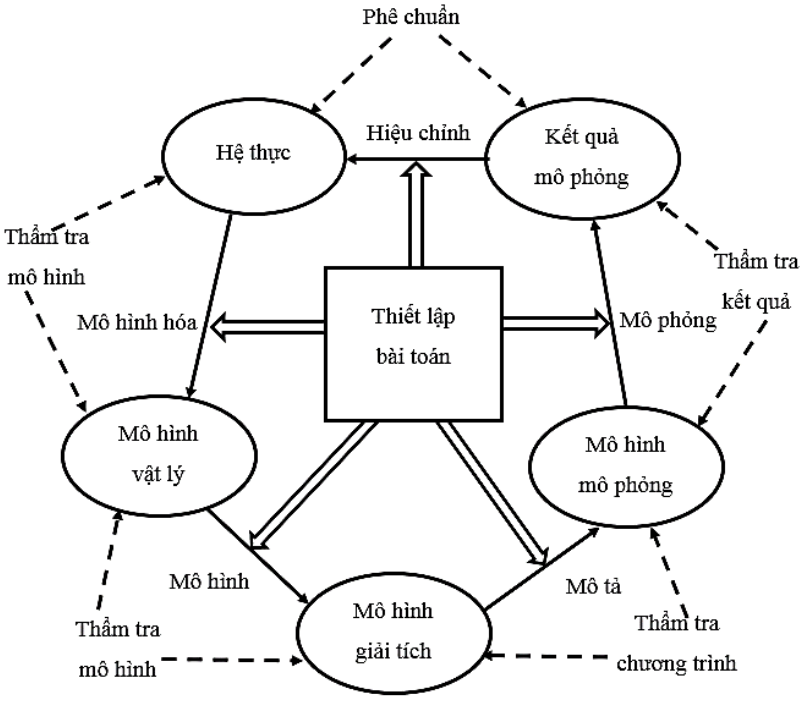
Mô hình hóa trong trường hợp tổng quát được thực hiện theo nhiều bước từ mô hình thực đến mô hình mô phỏng như mô tả trên Hình 1-15.

Những tính chất của hệ cần được sao chép vào mô hình và do đó tất cả các giai đoạn của quá trình tính toán cũng như mô phỏng được xác định qua những mục tiêu của việc mô hình hóa, tức là:

- Sự phù hợp mô hình, mức độ mô hình hóa và sự mô tả mô hình.
- Các tính toán và các thử nghiệm mô phỏng.
- Sự phê chuẩn, thẩm tra và sự hiểu biết về các kết quả.
- Sự hiệu chỉnh hệ hoặc mô hình (Hình 1-16).



Hình 1-15 Quá trình mô hình hóa - nhiệm vụ và kết quả [5].



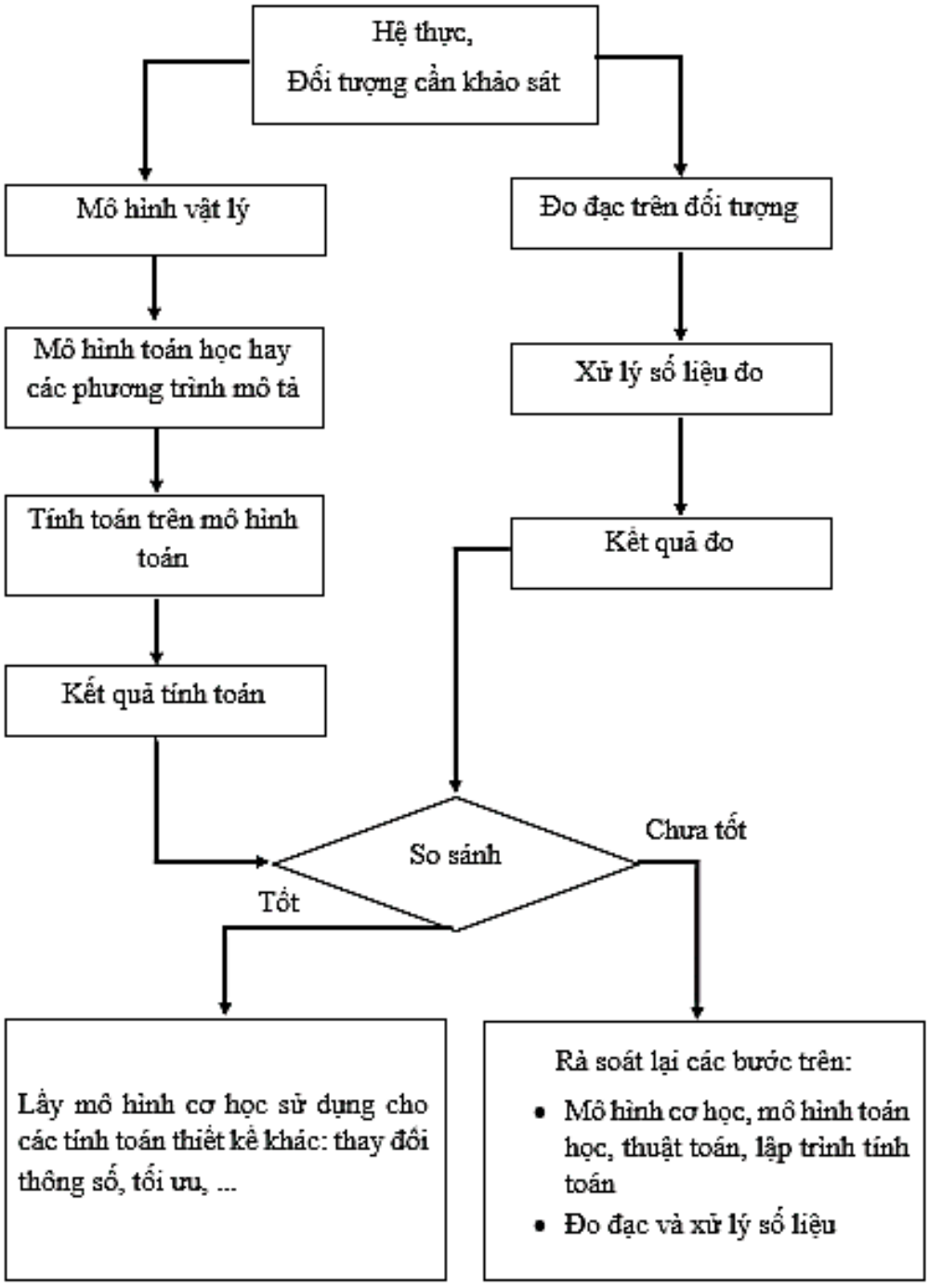
Hình 1-16 Chu trình thực hiện mô hình hóa [5].

Hình 1-17 mô tả quá trình xây dựng mô hình cho một hệ thống thực đã có và cách thức để nhận được mô hình tốt cho mục tiêu nghiên cứu.

Trong quá trình thiết kế hệ cơ điện tử, việc nghiên cứu (mô hình hóa, tính toán, mô phỏng) được thực hiện trên nhiều mức trừu tượng (mức chức năng, mức hệ thống, và mức các phần tử) trong những lĩnh vực vật lý khác nhau. Các kết quả nhận được ở mức cao hơn là những đầu ra của việc nghiên cứu ở mức thấp hơn.

Các kết quả nhận được ở mức thấp hơn dẫn tới sự khẳng định những kết quả mục tiêu ở mức cao hơn hoặc dẫn đến một sự hiệu chỉnh của chính mức đó. Chu trình mô phỏng như mô tả trên xuất hiện một cách lặp lại trên mỗi mức.

1.5.3. Phương pháp mô hình hóa



Hình 1-17 Phương pháp xây dựng mô hình lý thuyết và thực nghiệm [5].

Các nhà vật lý đã phát triển các phương pháp để mô hình hóa các mối liên hệ phức tạp nhờ việc đơn giản hóa về các hệ đơn giản. Có những mô tả toán học phù hợp với nhiều hiện tượng thực tế khác nhau, như cùng một phương trình vi phân nhưng lại mô tả được cả hệ cơ cũng như hệ điện. Trạng thái của hệ được mô tả bằng các đại lượng (biến) trạng thái, mối liên hệ giữa các đại lượng sẽ được đưa ra dựa trên các định luật bảo toàn và các quy luật biến đổi.

Trong lý thuyết hệ thống, một mô hình toán học được thiết lập trên cơ sở phân tích lý thuyết hoặc phân tích hệ thống thực nghiệm, các thông số chưa biết của hệ thống sẽ được xác định bằng phương pháp nhận dạng thông số.

Phương pháp phân tích

Theo phương pháp phân tích, mô hình toán học được thiết lập từ quan hệ mô tả hệ thống tổng thể, chẳng hạn như phương trình cân bằng năng lượng, với sự hỗ trợ của một quá trình đã được chuẩn hóa.

Như ta đã biết, tổng năng lượng là không đổi, nó chỉ có thể chuyển từ hệ này sang hệ khác hoặc chuyển từ dạng này sang dạng khác. Ta không thể tạo ra năng lượng, mà ta chỉ chuyển đổi dạng năng lượng mà thôi. Hiểu theo nghĩa thông thường, năng lượng là khả năng làm thay đổi trạng thái hoặc thực hiện công năng lên một hệ vật chất.

Phương pháp tổng hợp

Nội dung của các phương pháp tổng hợp là: tách hệ vật lý thành các cấu trúc con, viết các phương trình mô tả cho từng hệ con đó, xây dựng trong các biến T hoặc P, và từ đó thiết lập được các phương trình mô hình.

***Bảng 1-1 Các biến T và P đối với các dạng năng lượng khác nhau** [5].*

Dạng năng lượng	Biến T		Biến P	
	Số lượng	***Cường độ***	***Số lượng***	***Cường độ***
Cơ học (tịnh tiến)	Quãng đường	Vận tốc	Xung lượng	Lực
Cơ học (quay)	Góc quay	Vận tốc góc	Mômen xung lượng	Mômen lực
Điện	Từ thông	Điện áp	Điện tích	Dòng điện
Thủy khí	Xung áp	Áp suất	Thể tích	Lưu lượng
Nhiệt		Nhiệt độ	Entropy	Dòng Entropy

Mô hình hóa thực nghiệm

Lý thuyết hệ thống cung cấp các phân tích hệ thống thực nghiệm một cách tiếp cận thay thế cho việc xây dựng mô hình vật lý, bao gồm các bước sau đây:

- Thu thập dữ liệu: Quan sát và đo đáp ứng của hệ, dưới tác động của các tín hiệu thử khác nhau.
- Xác định cấu trúc mô hình: Đưa ra cấu trúc mô hình bắt nguồn từ các phép đo đặc tính.
- Nhận dạng tham số: Xác định tham số mô hình từ các kết quả đo bằng cách so sánh Đối tượng - mô hình.

1.6. Bài tập

1. Robot công nghiệp hiện đại đầu tiên là gì và ai đã tạo ra nó?

2. Robot có thể được phân loại theo những tiêu chí nào?

3. Các thành phần cơ bản của một cánh tay robot là gì?

4. Khâu chấp hành cuối (end-effector) là gì và chức năng của nó là gì?

5. Không gian làm việc của một cánh tay robot là gì và nó bao gồm những loại không gian nào?

6. Vẽ sơ đồ một cánh tay robot với 6 khớp. Gọi tên và xác định chức năng của từng khớp và khâu?

7. Tính toán và vẽ không gian làm việc của một cánh tay robot với 3 khớp xoay (R)?

8. Mô hình hóa một khâu chấp hành cuối cho cánh tay robot dùng trong dây chuyền lắp ráp?

CHƯƠNG 2. ĐỘNG HỌC ROBOT

Mục tiêu cần đạt được của chương 2:

- Hiểu được động học robot;
- Mô hình hóa được động học robot;
- Biểu diễn được động học robot;
- Tính toán được động học thuận và động học nghịch robot.

2.1. Giới thiệu

Động học là khoa học về hình học trong chuyển động. Nó được giới hạn trong việc mô tả hình học thuần túy của chuyển động thông qua vị trí, hướng và đạo hàm theo thời gian. Trong robot học, các mô tả động học của các cánh tay robot và các nhiệm vụ của robot được sử dụng để thiết lập các phương trình cơ bản cho động lực học và điều khiển.

Các khâu và cánh tay trong một hệ thống robot được mô hình hóa như các vật thể rắn, các đặc tính của sự di chuyển vật thể rắn trong vị trí trung tâm của robot. Đại số vector và ma trận được sử dụng để phát triển một phương pháp hệ thống và tổng quát mô tả và biểu diễn vị trí của các cánh tay robot liên quan đến một hệ tọa độ gốc cố định G. Vì các cánh tay robot có thể quay hoặc dịch chuyển liên quan đến nhau, các hệ tọa độ gắn với các khâu $A, B, C, \ldots$ hoặc $B_1, B_2, B_3, \ldots$ được thiết lập cùng với trục khớp cho mỗi khâu để tìm ra các cấu hình tương đối, và trong hệ tọa độ tham chiếu G. Vị trí của khâu B liên quan đến khâu khác A được xác định bằng phép biến đổi tọa độ T_B^Agiữa các hệ tọa độ gắn với khâu.

Vấn đề động học là tìm ma trận biến đổi T_B^G liên quan đến hệ tọa độ cục bộ B gắn liền với hệ tọa độ gốc tham chiếu G. Một ma trận xoay 3×3 được sử dụng để mô tả các phép quay của hệ tọa độ cục bộ so với hệ tọa độ gốc. Các tọa độ đồng nhất sau đó được xác định để biểu diễn các vector vị trí và vector hướng trong không gian ba chiều. Các ma trận xoay được mở rộng thành ma trận biến đổi đồng nhất 4×4 để bao gồm cả các phép quay và di chuyển tịnh tiến. Các ma trận đồng nhất biểu diễn các khâu cứng tương đối của robot được tạo ra bằng một tập hợp quy tắc đặc biệt và được gọi là ma trận Denavit-Hartenberg theo Denavit và Hartenberg (1955) [6]. Ưu điểm của việc sử dụng ma trận Denavit-Hartenberg là tính phổ cập thuật toán trong việc suy ra phương trình động học khâu của robot.

Mô tả phân tích về sự di chuyển của một vật thể rắn dựa trên quan điểm rằng tất cả các điểm trong một vật thể rắn phải giữ nguyên vị trí tương đối ban đầu của chúng bất kể vị trí và hướng mới của vật thể rắn. Sự di chuyển tổng thể của vật thể rắn có thể được giảm xuống thành tổng của hai thành phần cơ bản của nó: sự di chuyển tịnh tiến của một điểm tham chiếu tùy ý cố định trong vật thể rắn cộng với chuyển động quay của vật thể rắn xoay quanh một đường thẳng thông qua điểm đó.

Nghiên cứu về chuyển động dịch chuyển của các vật thể rắn dẫn đến mối quan hệ giữa tỉ lệ thời gian thay đổi của một vector trong hệ tọa độ gốc toàn cục và tỉ lệ thời gian thay đổi của cùng một vector trong hệ tọa độ cục bộ.

Chuyển đổi từ một hệ tọa độ cục bộ B sang một hệ tọa độ toàn cục G được biểu diễn bởi

$$r^G = R_B^G r^B + d_B^G$$

Trong đó r^B là vector vị trí của một điểm trong hệ tọa độ B, r^G là vector vị trí của cùng một điểm được biểu diễn trong hệ tọa độ toàn cục G, và d là vector vị trí của gốc o trong hệ tọa độ $B(oxyz)$ liên quan đến gốc O của hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$. Do đó, một phép biến đổi có hai phần: một phép tịnh tiến d đưa gốc o về gốc O, cộng với một phép quay R_B^G đưa các trục của $oxyz$ về các trục tương ứng của $OXYZ$.

Công thức biến đổi $r^G = R_B^G r^B + d_B^G$ có thể được mở rộng để kết nối nhiều hơn hai hệ tọa độ. Công thức kết hợp cho một phép biến đổi từ một hệ tọa độ cục bộ B_1 đến một hệ tọa độ khác B_2, tiếp theo là một phép biến đổi từ B_2 đến hệ tọa độ toàn cục G là:

$$\begin{aligned} r^G &= \left(R_{B_2}^G r^{B_2} + d_{B_2}^G\right) + \left(R_{B_1}^{B_2} r^{B_1} + d_{B_1}^{B_2}\right) \\ &= R_{B_2}^G R_{B_1}^{B_2} r^{B_1} + d_{B_2}^G + d_{B_1}^{B_2} \\ &= R_{B_1}^G r^{B_1} + d_{B_1}^G \end{aligned}$$

Một robot bao gồm n khâu nối cứng với các chuyển động tương đối. Khâu gắn với mặt đất được gọi là khâu (0) và khâu gắn với khâu chấp hành cuối, là khâu thứ (n). Có hai vấn đề quan trọng trong phân tích cơ học của robot: vấn đề động học thuận và vấn đề động học ngược.

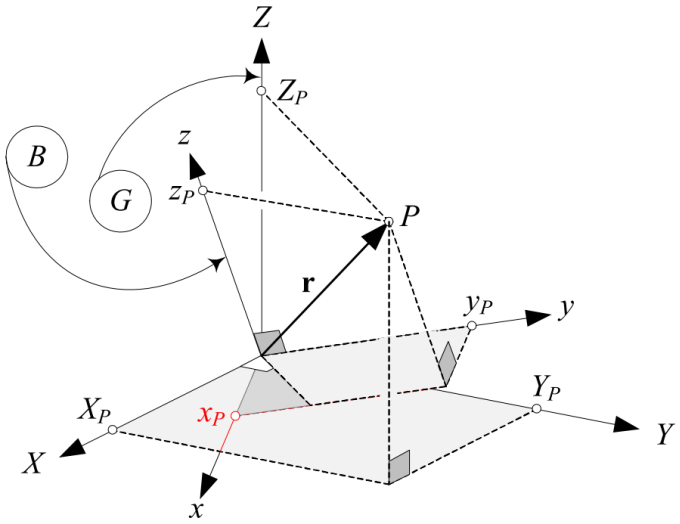
Trong động học thuận, vấn đề là vector vị trí của một điểm P nằm trong hệ tọa độ B_n được gắn vào khâu chấp hành cuối r_p^n và chúng ta đang tìm vị trí của P trong hệ tọa độ cơ sở B_0 được biểu thị bởi r_p^0 . Vấn đề động học thuận tương đương với việc có các giá trị của các biến khớp và xác định vị trí của khâu chấp hành cuối.

Trong động học ngược, vấn đề là ta có vector vị trí của một điểm P trong hệ tọa độ cơ sở B_0 là r_p^0 , và ta đang tìm kiếm r_p^n , vị trí của P trong khung cơ sở B_0. Vấn đề này tương đương với việc có vị trí của khâu chấp hành cuối và xác định một tập hợp các biến khớp để cho robot tới được điểm P.

Trong phần này, chúng tôi phát triển công thức biến đổi để chuyển thông tin động học qua lại giữa một khung tọa độ và một khung tọa độ khác.

2.2. Động học quay

Xem xét một vật thể rắn có một điểm cố định. Quay quanh điểm cố định là phép quay duy nhất của vật thể. Biểu diễn vật thể rắn bằng một hệ tọa độ B, mà quay trong một hệ tọa độ khác G, như được thể hiện trong Hình 2-1. Chúng ta xây dựng một phép tính quay dựa trên ma trận biến đổi để xác định hướng của B trong G và liên kết các tọa độ của một điểm P trên vật thể trong cả hai hệ tọa độ.



Hình 2-1 Một hệ tọa độ B được xoay trong một hệ tọa độ toàn cục cố định G, xoay quanh một điểm cố định tại O.

2.2.1. Quay quanh các trục toạ độ toàn cục

Xem xét một vật thể rắn B với hệ tọa độ cục bộ $Oxyz$ ban đầu trùng với hệ tọa độ toàn cục $OXYZ$. Điểm O của vật thể B được cố định vào mặt đất G và là gốc của cả hai hệ tọa độ. Nếu vật thể rắn B quay α độ quanh trục Z của hệ tọa độ toàn cục, thì tọa độ của bất kỳ điểm P nào trên vật thể rắn trong hệ tọa độ cục bộ và toàn cục có mối quan hệ được mô tả bởi phương trình sau:

$$G_r = Q_{Z,\alpha} r^B \tag{2-1}$$

Trong đó,

$$G_r = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \qquad B_r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

Và

$$Q_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

Tương tự, việc xoay β độ theo trục Y và γ độ theo trục X của hệ toạ độ toàn cục liên kết các tọa độ cục bộ và toàn cục của điểm P bằng các phương trình sau

$$G_r = Q_{Y,\beta} r^B \tag{2-4}$$

$$G_r = Q_{X,\gamma} r^B \tag{2-5}$$

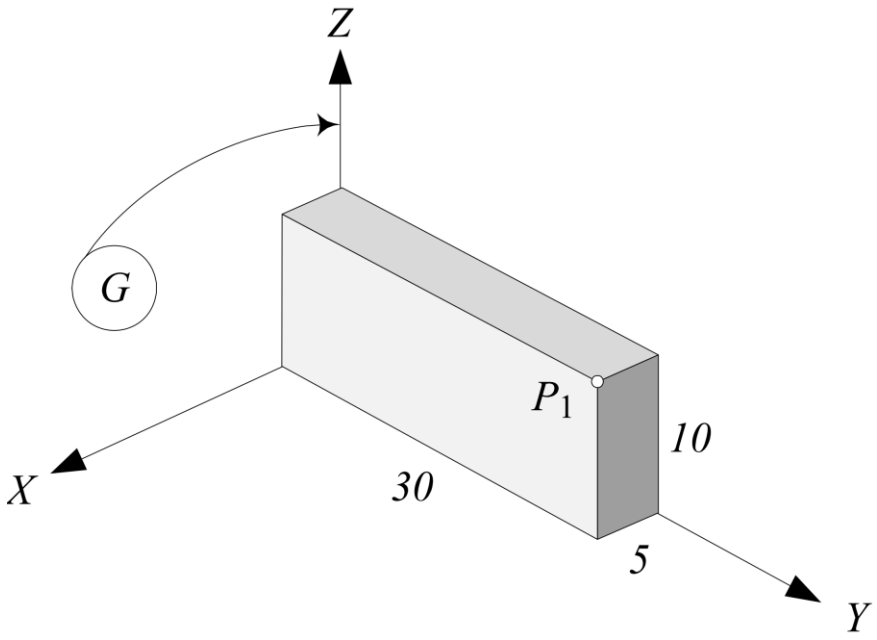
Trong đó,

$$Q_{Y,\beta} = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix} \quad (2\text{-}6)$$

$$Q_{X,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\gamma & -sin\gamma \\ 0 & sin\gamma & cos\gamma \end{bmatrix} \quad (2\text{-}7)$$

Ví dụ 2-1: Quay liên tiếp quanh các trục toàn cục.

Vị trí cuối cùng của góc $P(5, 30, 10)$ của khối đá như trong Hình 2-2 sau khi xoay 30 độ quanh trục Z, tiếp theo là xoay 30 độ quanh trục X, và sau đó là 90 độ quanh trục Y có thể được tìm bằng cách nhân trước hết $Q_{Z,30}$ với $[5, 30, 10]^T$ để thu được vị trí toàn cục mới sau phép xoay đầu tiên.



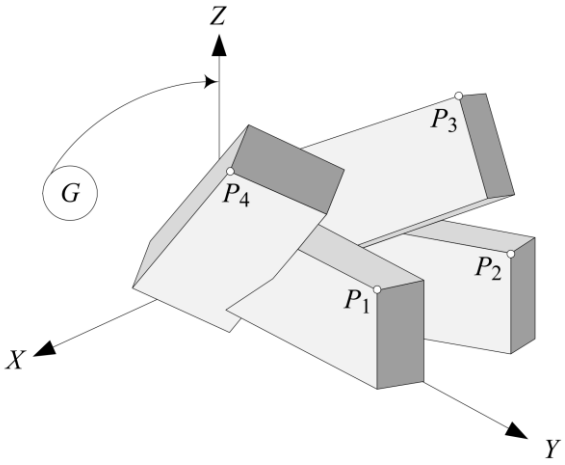
Hình 2-2 Góc P của khối đá ở vị trí ban đầu.

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos30 & -sin30 & 0 \\ sin30 & cos30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.68 \\ 28.48 \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}8)$$

và sau đó nhân $Q_{X,30}$ và $[-10.68, 28.48, 10]^T$ để có được vị trí của P sau phép quay thứ hai.

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos30 & -sin30 \\ 0 & sin30 & cos30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10.68 \\ 28.48 \\ 10.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.68 \\ 19.66 \\ 22.9 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}9)$$

Và cuối cùng nhân $Q_{Y,90}$ và $[-10.68, 19.66, 22.9]^T$ để có được vị trí cuối cùng của P sau lần quay thứ ba. Khối đá và điểm P ở vị trí đầu tiên, thứ hai, thứ ba và thứ tư được hiển thị trong Hình 2-3.



Hình 2-3 Khối đá và điểm P ở vị trí đầu tiên, thứ hai, thứ ba và thứ tư.

$$\begin{bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos90 & 0 & sin90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin90 & 0 & cos90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10.68 \\ 19.66 \\ 22.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.9 \\ 19.66 \\ 10.68 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}10)$$

Ví dụ 2-2: Phép quay toàn cục phụ thuộc vào thời gian.

Xem xét một vật thể rắn B đang liên tục quay quanh trục Y của G với tốc độ là 0.3 rad/s. Ma trận biến đổi quay của vật thể là:

$$Q_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} cos0.3t & 0 & sin0.3t \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin0.3t & 0 & cos0.3t \end{bmatrix} \quad (2\text{-}11)$$

Bất kỳ điểm nào của B sẽ di chuyển trên một vòng tròn có bán kính $R = \sqrt{X^2 + Z^2}$ song song với mặt phẳng (X, Z).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos0.3t & 0 & sin0.3t \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin0.3t & 0 & cos0.3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos0.3t + zsin0.3t \\ y \\ zcos0.3t - xsin0.3t \end{bmatrix} \quad (2\text{-}12)$$

$$X^2 + Z^2 = (xcos0.3t + zsin0.3t)^2 + (zcos0.3t - xsin0.3t)^2$$
$$x^2 + z^2 = R^2 \quad (2\text{-}13)$$

Xét một điểm P tại $r^B = [1 \quad 0 \quad 0]^T$. Sau thời gian $t = 1\ giây$, điểm đó sẽ được nhìn thấy tại:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos0.3 & 0 & sin0.3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin0.3 & 0 & cos0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.955 \\ 0 \\ -0.295 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}14)$$

Và sau thời gian $t = 2$ giây, điểm đó sẽ được nhìn thấy tại:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos0.6 & -sin0.6 & 0 \\ sin0.6 & cos0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.825 \\ 0.564 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}15)$$

Ta có thể tìm được vận tốc toàn cục của điểm P bằng cách lấy đạo hàm theo thời gian của

$$r_P^G = Q_{Y,\beta} r_P^B \quad (2\text{-}16)$$

$$Q_{Y,\beta} = \begin{bmatrix} cos0.3t & 0 & sin0.3t \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin0.3t & 0 & cos0.3t \end{bmatrix} \quad (2\text{-}17)$$

Do đó, biểu diễn toàn cục của vector vận tốc là:

$$v_P^G = \dot{Q}_{Y,\beta} r_P^B = \begin{bmatrix} zcos0.3t - xsin0.3t \\ 0 \\ -xcos0.3t - zsin0.3t \end{bmatrix} \quad (2\text{-}18)$$

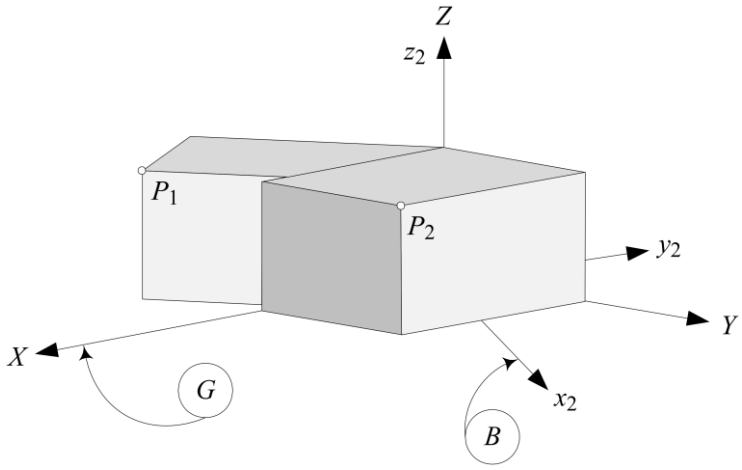
Ví dụ 2-3: Phép quay toàn cục, vị trí cục bộ.

Nếu một điểm P được di chuyển đến ${r_2}^G = [4,3,2]^T$ sau một phép xoay 60 độ quanh trục Z, vị trí của nó trong hệ tọa độ cục bộ là:

$${r_2}^G = Q_{Z,60}^{-1} {r_2}^G \quad (2\text{-}19)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos60 & -sin60 & 0 \\ sin60 & cos60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6 \\ -1.95 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Khung tọa độ cục bộ trùng với khung tọa độ toàn cục trước khi quay, do đó các tọa độ toàn cục của điểm P trước khi quay cũng là ${r_1}^G = [4.6, -1.95, 2]^T$. Vị trí của điểm P trước và sau khi quay được hiển thị trong Hình 2-4.



Hình 2-4 Vị trí của điểm P trong ví dụ 2-3 trước và sau khi quay.

2.2.2. Phép quay liên tiếp quanh các trục tọa độ Descartes toàn cục

Vị trí toàn cục cuối cùng của một điểm P trên một vật thể rắn B có vector vị trí là r, sau một chuỗi các phép quay Q_1, Q_2 , Q_3,..., Q_n xoay quanh các trục toàn cục có thể được xác định bằng cách:

$$r^G = Q_B^G r^B \quad (2\text{-}20)$$

Trong đó,

$$Q_B^G = Q_n \cdots Q_3 Q_2 Q_1 \quad (2\text{-}21)$$

Và, r^G và r^B chỉ ra vector vị trí r trong hệ tọa độ toàn cục và cục bộ. Q_B^G được gọi là ma trận quay toàn cục. Nó ánh xạ các tọa độ cục bộ sang các tọa độ toàn cục tương ứng của chúng.

Vì phép nhân ma trận không có tính giao hoán, thứ tự thực hiện các phép quay là quan trọng. Một ma trận quay là ma trận trực giao; tức là ma trận chuyển vị của nó Q^T bằng với nghịch đảo của nó Q^{-1}.

$$Q^T = Q^{-1} \tag{2-22}$$

Phép quay quanh các trục tọa độ toàn cục là một khái niệm đơn giản về mặt khái niệm vì các trục quay được cố định trong không gian. Giả sử chúng ta có tọa độ của mỗi điểm trên một vật thể rắn trong hệ toàn cục mà ban đầu bằng với các tọa độ cục bộ. Vật thể rắn quay quanh một trục toàn cục, sau đó ma trận quay toàn cục chính xác sẽ cho chúng ta tọa độ toàn cục mới của các điểm. Khi chúng ta tìm ra tọa độ của các điểm trên vật thể rắn sau vòng quay đầu tiên, vòng quay thứ hai tương tự như trước vòng quay đầu tiên.

Ví dụ 2-4: Ma trận quay toàn cục liên tiếp.

Ma trận quay toàn cục sau khi thực hiện xoay $Q_{Z,\alpha}$ tiếp theo $Q_{Y,\beta}$ và sau đó là $Q_{X,\gamma}$ là:

$$Q_B^G = Q_{X,\gamma}Q_{Y,\beta}Q_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -c\beta s\alpha & s\beta \\ c\gamma s\alpha + c\alpha s\beta s\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & -c\beta s\gamma \\ s\alpha s\gamma - c\alpha c\gamma s\beta & c\alpha s\gamma + c\gamma s\alpha s\beta & s\beta c\gamma \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

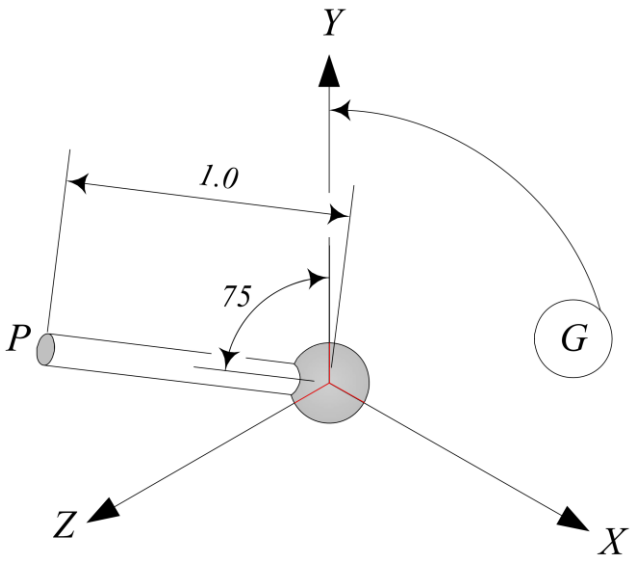
Ví dụ 2-5: Phép quay liên tiếp quanh hệ tọa độ toàn cục, vị trí so với hệ tọa độ toàn cục.

Điểm cuối P của cánh tay được hiển thị trong Hình 2-5 được đặt tại:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ lcos\theta \\ lsin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1cos75 \\ 1sin75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.26 \\ 0.97 \end{bmatrix} \tag{2-24}$$

Ma trận xoay để tìm vị trí mới của điểm cuối sau khi quay -29 độ quanh trục X, tiếp theo là 30 độ quanh trục Z, và sau đó là lại 132 độ quanh trục X là:

$$Q_B^G = Q_{X,132}Q_{Y,30}Q_{Z,-29} = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.44 & -0.24 \\ -0.33 & -0.15 & -0.93 \\ 0.37 & 0.89 & -0.27 \end{bmatrix} \tag{2-25}$$



Hình 2-5 Cánh tay trong ví dụ 2-5.

Và vị trí mới của nó là tại:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.44 & -0.24 \\ -0.33 & -0.15 & -0.93 \\ 0.37 & 0.89 & -0.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.26 \\ 0.97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.35 \\ -0.94 \\ -0.031 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}26)$$

Ví dụ 2-6: Thứ tự quay, và thứ tự nhân ma trận.

Thay đổi thứ tự của các ma trận xoay toàn cục tương đương với việc thay đổi thứ tự của các phép quay. Vị trí của một điểm P trên một vật thể rắn B được xác định bởi $r_P^B = [1 \quad 2 \quad 3]^T$. Vị trí toàn cục của nó sau khi quay 30 độ quanh trục X và sau đó 45 độ quanh trục Y là:

$$(r_P^G)_1 = Q_{Y,45} Q_{X,30} r_P^B = \begin{bmatrix} 0.53 & -0.84 & 0.13 \\ 0.0 & 0.15 & 0.99 \\ -0.85 & -0.52 & 0.081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.76 \\ 3.27 \\ -1.64 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}27)$$

và nếu chúng ta thay đổi thứ tự các phép quay, thì vị trí của nó sẽ là ở:

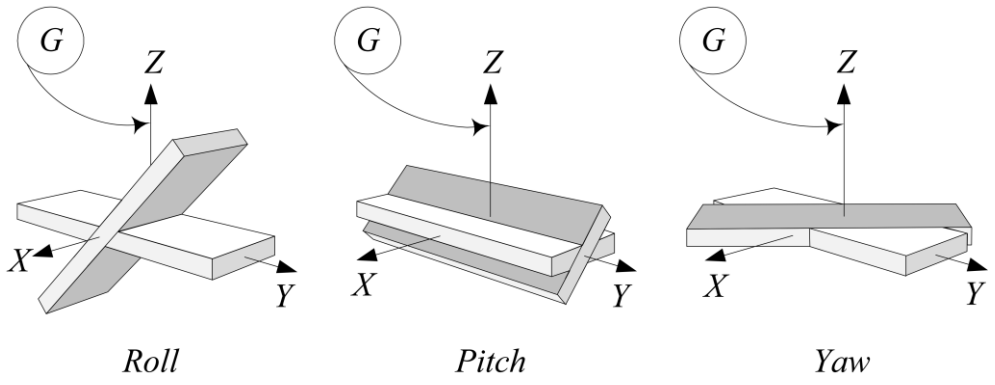
$$(r_P^G)_2 = Q_{X,30} Q_{Y,45} r_P^B = \begin{bmatrix} 0.53 & 0.0 & 0.85 \\ -0.84 & 0.15 & 0.52 \\ -0.13 & -0.99 & 0.081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.08 \\ 1.02 \\ -1.86 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}28)$$

Các vị trí cuối cùng của P là: $d = \left|(r_P^G)_1 - (r_P^G)_2\right| = 4.456$

2.2.3. Góc Roll-Pitch-Yaw toàn cục

Phép xoay quanh trục X của hệ tọa độ toàn cục được gọi là *roll*, phép xoay quanh trục Y của hệ tọa độ toàn cục được gọi là *pitch*, và phép xoay quanh trục Z của hệ tọa độ toàn cục được gọi là *yaw*. Ma trận xoay toàn cục *roll-pitch-yaw* là:

$$Q_B^G = Q_{X,\gamma} Q_{Y,\beta} Q_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\alpha s\gamma + c\gamma s\alpha s\beta & s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma s\beta \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & -c\gamma s\alpha + c\alpha s\beta s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\alpha & c\alpha c\beta \end{bmatrix} \quad (2\text{-}29)$$



Hình 2-6 Phép quay toàn cục roll-pitch-yaw [1].

Hình 2-6 mô tả các phép quay 45 độ về roll, pitch và yaw xoay quanh các trục của hệ tọa độ toàn cục.

Dựa vào các góc *roll-pitch-yaw*, chúng ta có thể tính toán ma trận quay tổng thể bằng cách sử dụng Phương trình (2-29). Ngoài ra, chúng ta cũng có thể tính toán các góc *roll-pitch-yaw*

tương đương khi một ma trận quay được cung cấp. Giả sử r_{ij} xác định phần tử của hàng i và cột j của ma trận quay *roll-pitch-yaw* (2-29), thì góc *roll* là:

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right) \tag{2-30}$$

Và góc *pitch* là

$$\beta = -sin^{-1}(r_{31}) \tag{2-31}$$

Và góc *yaw* là

$$\gamma = tan^{-1}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right) \tag{2-32}$$

Miễn là $\neq\ 0$.

Ví dụ 2-7: Xác định các góc *roll-pitch-yaw.*

Hãy xác định các góc *roll-pitch-yaw* cần thiết để làm cho trục x của hệ tọa độ vật thể B song song với u, trong khi trục y vẫn nằm trong mặt phẳng (X, Y).

$$u = \hat{I} + 2\hat{J} + 3\hat{K} \tag{2-33}$$

Vì trục x phải song song với u, chúng ta có

$$\hat{\imath}^G = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{I} + \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{J} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{K} \tag{2-34}$$

Và vì trục y nằm trong mặt phẳng (X, Y), chúng ta có

$$\hat{\jmath}^G = (\hat{I}\cdot\hat{\jmath})\hat{I} + (\hat{I}\cdot\hat{\jmath})\hat{J} = cos\theta\hat{I} + sin\theta\hat{J} \tag{2-35}$$

Các trục $G_{\hat{\imath}}$ và $G_{\hat{\jmath}}$ phải vuông góc với nhau, do đó,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{2-36}$$

$$\theta = -26.56 \text{ độ} \tag{2-37}$$

Chúng ta có thể tìm $\hat{k}^G$ bằng phép nhân vector chéo.

$$\hat{k}^G = \hat{\imath}^G \times \hat{\jmath}^G = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.894 \\ -0.447 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.358 \\ 0.717 \\ -0.597 \end{bmatrix} \tag{2-38}$$

Do đó, ma trận Q_B^G biến đổi là:

$$Q_B^G = \begin{bmatrix} \hat{I}.\hat{\imath} & \hat{I}.\hat{\jmath} & \hat{I}.\hat{k} \\ \hat{J}.\hat{\imath} & \hat{J}.\hat{\jmath} & \hat{J}.\hat{k} \\ \hat{K}.\hat{\imath} & \hat{K}.\hat{\jmath} & \hat{K}.\hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & 0.894 & 0.358 \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -0.447 & 0.717 \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -0.597 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}39)$$

Bây giờ đã có thể xác định các góc *roll-pitch-yaw* cần thiết để di chuyển hệ tọa độ vật thể B từ vị trí trùng khớp với G đến vị trí cuối cùng.

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{0}{-0.597}\right) = 0 \quad (2\text{-}40)$$

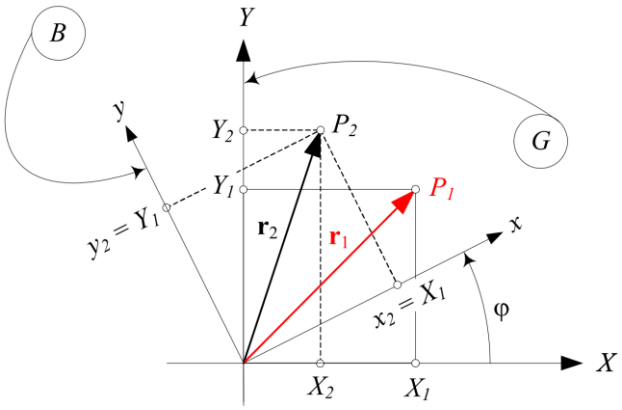
$$\beta = -sin^{-1}(r_{31}) = -sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx -0.93\, rad \quad (2\text{-}41)$$

$$\gamma = tan^{-1}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{14}}}{\frac{1}{\sqrt{14}}}\right) \approx 1.1071\, rad \quad (2\text{-}42)$$

2.2.4. Phép quay quanh trục tọa độ Descartes cục bộ

Xét một vật thể rắn B có một điểm cố định trong không gian tại O. Hệ tọa độ vật thể cục bộ $B(Oxyz)$ trùng với một hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$, trong đó gốc của cả hai hệ tọa độ đều nằm trên điểm cố định O. Nếu vật thể quay một góc φ quay quanh trục z của hệ tọa độ cục bộ của nó, như có thể thấy trong bản vẽ phía trên được hiển thị trong Hình 2-7, thì các tọa độ của bất kỳ điểm nào trên vật thể rắn trong các hệ tọa độ cục bộ và toàn cục liên quan theo phương trình sau:

$$r^B = A_{z,\varphi} r^G \quad (2\text{-}43)$$



Hình 2-7 Vector vị trí của điểm P trước và sau khi quay khung tọa độ cục bộ xung quanh trục z của khung tọa độ cục bộ.

Các vector r^G và r^B là các vector vị trí của điểm trong các hệ toạ độ toàn cục và cục bộ tương ứng.

$$r^G = [X \quad Y \quad Z]^T \quad (2\text{-}44)$$

$$r^B = [x \quad y \quad z]^T \tag{2-45}$$

Và $A_{z,\varphi}$ là ma trận quay z

$$A_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-46}$$

Tương tự, quay góc θ xoay quanh trục y và quay góc ψ xoay quanh trục x được mô tả bằng ma trận quay y, $A_{y,\theta}$ và ma trận quay x, $A_{x,\psi}$ tương ứng.

$$A_{y,\theta} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \tag{2-47}$$

$$A_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\psi & sin\psi \\ 0 & -sin\psi & cos\psi \end{bmatrix} \tag{2-48}$$

Ví dụ 2-8: Quay cục bộ, vị trí cục bộ.

Nếu một hệ tọa độ cục bộ $Oxyz$ đã được quay 60 độ quanh trục z và một điểm P trong hệ tọa độ toàn cục $OXYZ$ ở vị trí $(4, 3, 2)$, tọa độ của nó trong hệ tọa độ cục bộ $Oxyz$ là:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos60 & sin60 & 0 \\ -sin60 & cos60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.60 \\ -1.97 \\ 2.0 \end{bmatrix} \tag{2-49}$$

Ví dụ 2-9: Quay cục bộ, vị trí toàn cục.

Nếu một khung tọa độ cục bộ $Oxyz$ đã được quay 60 độ xoay quanh trục z và một điểm P trong khung tọa độ cục bộ $Oxyz$ nằm ở (4, 3, 2), vị trí của nó trong khung tọa độ toàn cục $OXYZ$ là:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos60 & sin60 & 0 \\ -sin60 & cos60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.60 \\ 4.96 \\ 2.0 \end{bmatrix} \tag{2-50}$$

Ví dụ 2-10: Quay liên tiếp cục bộ, vị trí toàn cục.

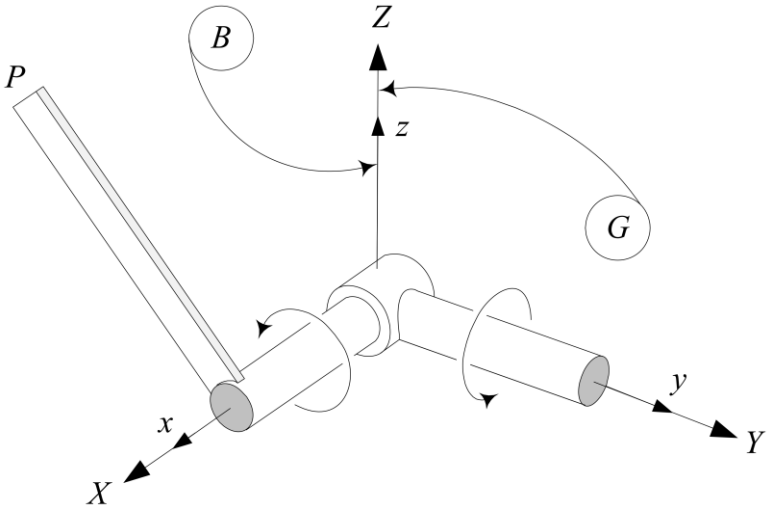
Cánh tay được hiển thị trong Hình 2-8 có hai bộ chấp hành. Bộ chấp hành đầu tiên xoay cánh tay -90 độ quanh trục y, sau đó bộ chấp hành thứ hai xoay cánh tay 90 độ quanh trục x. Nếu điểm cuối P đang ở

$$r_P^B = [9.5 \quad -10.1 \quad 10.1]^T \tag{2-51}$$

vị trí của nó trong hệ tọa độ toàn cục là:

$$r_2^G = \left[A_{x,90}A_{y,-90}\right]^{-1} r_P^B = A_{y,-90}^{-1}A_{x,90}^{-1}r_P^B$$

$$= A_{y,-90}^T A_{x,90}^T r_P^B = \begin{bmatrix} 10.1 \\ -10.1 \\ 9.5 \end{bmatrix} \tag{2-52}$$



Hình 2-8 Cánh tay.

2.2.5. Quay liên tiếp quanh các trục tọa độ cục bộ

Vị trí toàn cục cuối của một điểm P trong một vật thể rắn B với vector vị trí r, sau một số lần quay A_1, A_2, A_3,..., A_n về các trục tọa độ cục bộ, có thể được xác định bằng cách:

$$r^B = A_G^B r^G \tag{2-53}$$

Trong đó,

$$A_G^B = A_n \cdots A_3 A_2 A_1 \tag{2-54}$$

A_G^B được gọi là ma trận xoay cục bộ và nó ánh xạ các tọa độ toàn cục sang tọa độ cục bộ tương ứng.

Quay quanh trục tọa độ cục bộ là một khái niệm thú vị về mặt khái niệm vì trong một chuỗi các phép quay, mỗi phép quay đều xoay quanh một trong các trục của khung tọa độ cục bộ, mà đã được di chuyển đến vị trí toàn cục mới trong lần quay cuối.

Giả sử chúng ta có tọa độ của mỗi điểm trên một vật thể rắn trong hệ tọa độ toàn cục. Vật thể rắn và hệ tọa độ cục bộ của nó quay quanh một trục cục bộ, sau đó ma trận xoay cục bộ liên quan tới các tọa độ toàn cục mới của các điểm tới các tọa độ cục bộ tương ứng. Nếu ta có một hệ tọa độ trung gian cố định trong không gian trùng với vị trí mới của hệ tọa độ vật thể, chúng ta có thể thực hiện một lần quay thứ hai cho vật thể rắn về một trục tọa độ cục bộ. Bây giờ, một ma trận xoay cục bộ khác liên quan tới các tọa độ trong hệ tọa độ cố định trung gian tới các tọa độ cục bộ tương ứng. Do đó, các tọa độ toàn cục cuối của các điểm phải được chuyển đổi trước sang hệ tọa độ cố định trung gian và sau đó chuyển đổi sang các trục toàn cục ban đầu.

Ví dụ 2-11: Quay liên tiếp cục bộ, vị trí cục bộ.

Khung tọa độ cục bộ $B(Oxyz)$ ban đầu trùng với khung tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$ thực hiện qua một góc quay $\varphi = 30$ độ quanh trục z, sau đó $\theta = 30$ độ quanh trục x, và sau đó $\psi = 30$ độ quanh trục y. Tọa độ cục bộ của một điểm P nằm ở $X = 5$, $Y = 30$, $Z = 10$ có thể được xác định bằng công thức $[x \quad y \quad z]^T = A_{y,\psi} A_{x,\theta} A_{z,\varphi} [5 \quad 30 \quad 10]^T$. Ma trận quay cục bộ là:

$$A_G^B = A_{y,30}A_{x,30}A_{z,30} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.65 & -0.43 \\ -0.43 & 0.75 & 0.50 \\ 0.65 & -0.125 & 0.75 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}55)$$

và tọa độ của P trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.65 & -0.43 \\ -0.43 & 0.75 & 0.50 \\ 0.65 & -0.125 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.35 \\ 25.35 \\ 7.0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}56)$$

Ví dụ 2-12: Quay liên tiếp cục bộ.

Ma trận xoay cho một điểm trên vật thể $P(x, y, z)$ sau khi quay $A_{z,\varphi}$ tiếp theo là $A_{x,\theta}$ và $A_{y,\psi}$ là:

$$A_G^B = A_{y,\psi}A_{x,\theta}A_{z,\varphi} =$$

$$\begin{bmatrix} c\varphi c\psi - s\theta s\varphi s\psi & c\psi s\varphi + c\varphi s\theta s\psi & -c\theta s\psi \\ -c\theta s\varphi & c\theta c\varphi & s\theta \\ c\varphi c\psi + s\theta c\psi s\varphi & s\varphi s\psi - c\varphi s\theta c\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \quad (2\text{-}57)$$

2.2.6. Góc Euler

Việc quay quanh trục Z của hệ tọa độ toàn cục được gọi là tiền chuyển động, việc quay quanh trục x của hệ tọa độ cục bộ được gọi là chuyển động lắc lư, và việc quay quanh trục z của hệ tọa độ cục bộ được gọi là quay tròn. Các góc quay tiền chuyển động- chuyển động lắc lư - quay tròn cũng được gọi là góc Euler. Ma trận quay góc Euler có nhiều ứng dụng trong động học vật thể rắn. Để tìm ma trận quay góc Euler để chuyển từ hệ toàn cục $G(OXYZ)$ sang hệ tọa độ vật thể cuối $B(Oxyz)$, chúng ta sử dụng một hệ hệ tọa độ vật thể $B'(Ox'y'z')$ như được thể hiện trong Hình 2.12 sao cho trước vòng quay đầu tiên trùng với hệ toàn cục. Giả sử đầu tiên quay góc φ quanh trục z'. Bởi vì trục Z và trục z' trùng nhau, ta có:

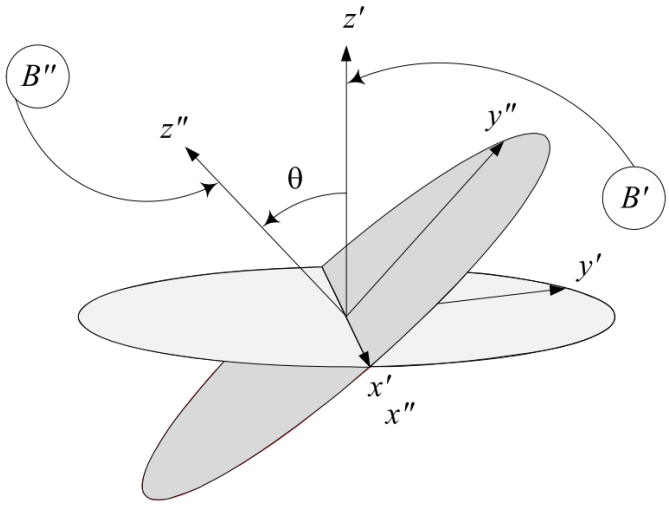
$$r^{B'} = A_G^{B'} r^G \quad (2\text{-}58)$$

$$A_G^{B'} = A_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}59)$$

Ta xem xét khung tọa độ $B'(Ox'y'z')$ như là một khung tọa độ toàn cục cố định mới và đưa ra một hệ tọa độ vật thể mới $B''(Ox''y''z'')$. Trước khi thực hiện phép xoay thứ hai, hai khung trùng nhau. Sau đó, chúng ta thực hiện phép quay một góc θ xung quanh trục x'' như được thể hiện trong Hình 2-9. Phép biến đổi giữa khung tọa độ $B'(Ox'y'z')$ và $B''(Ox''y''z'')$ là:

$$r^{B"} = A_{B'}^{B"} r^{B'} \quad (2\text{-}60)$$

$$A_{B'}^{B''} = A_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad (2\text{-}61)$$

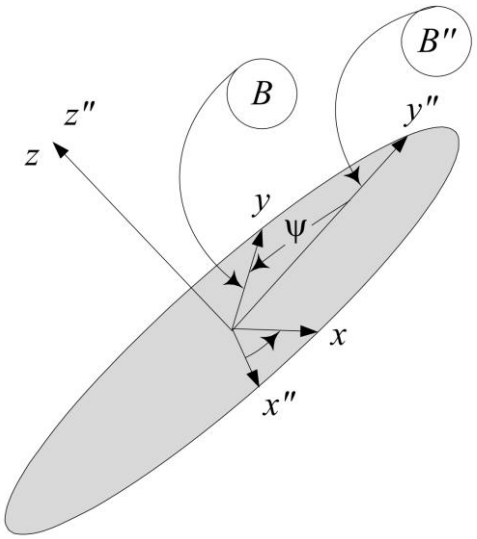


Hình 2-9 Góc Euler thứ 2.

Xem xét khung tọa độ $B''(Ox''y''z'')$ như một khung tọa độ toàn cục mới cố định và xem xét khung tọa độ vật thể cuối $B(Oxyz)$ trùng với B'' trước khi thực hiện phép quay thứ ba. Bây giờ, chúng ta thực hiện phép xoay một góc ψ quanh trục z'' như được thể hiện trong Hình 2-10. Phép biến đổi giữa $B''(Ox''y''z'')$ và $B(Oxyz)$ là:

$$r^B = A^B_{B''} r^{B''} \tag{2-62}$$

$$A^B_{B''} = A_{z,\psi} = \begin{bmatrix} cos\psi & sin\psi & 0 \\ -sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-63}$$



Hình 2-10 Góc Euler thứ 3.

Theo quy tắc hợp thành của phép quay, phép biến đổi từ $G(OXYZ)$ sang $B(Oxyz)$ là:

$$r^B = A^B_G r^G \tag{2-64}$$

Trong đó,

$$A^B_G = A_{z,\psi} A_{x,\theta} A_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} c\varphi c\psi - c\theta s\varphi s\psi & c\psi s\varphi + c\theta c\varphi s\psi & s\theta s\psi \\ -c\varphi s\psi - c\theta c\psi s\varphi & -s\varphi s\psi + c\theta s\varphi c\psi & s\theta c\psi \\ s\theta s\varphi & -c\varphi s\theta & c\theta \end{bmatrix} \tag{2-65}$$

Và do đó,

$$Q_B^G = A_G^{B^{-1}} = A_G^{B^T} = \left[A_{z,\psi}A_{x,\theta}A_{z,\varphi}\right]^T = \begin{bmatrix} c\varphi c\psi - c\theta s\varphi s\psi & -c\varphi s\psi - c\theta c\psi s\varphi & s\theta s\varphi \\ c\psi s\varphi + c\theta c\varphi s\psi & -s\varphi s\psi + c\theta c\varphi c\psi & -c\varphi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (2\text{-}66)$$

Dựa trên các góc của tiền chuyển động φ, chuyển động lắc lư θ và quay tròn ψ, chúng ta có thể tính toán ma trận xoay tổng quát sử dụng Phương trình (2-65). Ngoài ra, chúng ta cũng có thể tính toán các góc tương đương của tiền chuyển động, chuyển động lắc lư và quay tròn khi có ma trận xoay.

Nếu r_{ij} xác định phần tử của hàng i và cột j của ma trận quay tiền chuyển động - chuyển động lắc lư - quay tròn (2-65), thì,

$$\theta = cos^{-1}(r_{33}) \quad (2\text{-}67)$$

$$\varphi = -tan^{-1}\left(\frac{r_{31}}{r_{32}}\right) \quad (2\text{-}68)$$

$$\psi = tan^{-1}\left(\frac{r_{13}}{r_{23}}\right) \quad (2\text{-}69)$$

Miễn là $sin\theta \neq 0$.

Ví dụ 2-13: Ma trận xoay góc Euler.

Ma trận quay Euler hoặc ma trận quay tiền chuyển động - chuyển động lắc lư - quay tròn cho $\varphi = 79.15$ độ, $\theta = 41.41$ độ, và $\psi = -40.7$ độ có thể được xác định bằng cách thay φ, θ và ψ vào Phương trình (2-65).

$$A_G^B = A_{z,-40.7}A_{x,41.41}A_{z,79.15} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.65 & -0.43 \\ -0.43 & 0.75 & 0.50 \\ 0.65 & -0.125 & 0.75 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}70)$$

Ví dụ 2-14: Góc Euler của ma trận quay cục bộ.

Ma trận xoay cục bộ sau khi xoay một góc 30 độ quanh trục z, sau đó xoay một góc 30 độ quanh trục x, và cuối cùng là quay 30 độ quanh trục y là:

$$A_G^B = A_{y,30}A_{x,30}A_{z,30} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.65 & -0.43 \\ -0.43 & 0.75 & 0.50 \\ 0.65 & -0.125 & 0.75 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}71)$$

Và do đó, các tọa độ cục bộ của một điểm mẫu tại $X = 5, Y = 30, Z = 10$ là:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.65 & -0.43 \\ -0.43 & 0.75 & 0.50 \\ 0.65 & -0.125 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.35 \\ 25.35 \\ 7.0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}72)$$

Các góc Euler của ma trận xoay tương ứng giữa quay tiền chuyển động - chuyển động lắc lư - quay tròn là:

$$\theta = cos^{-1}(0.75) = 41.41^o$$

$$\varphi = -tan^{-1}\left(\frac{0.65}{-0.125}\right) = 79.15^o \quad (2\text{-}73)$$

$$\psi = tan^{-1}\left(\frac{-0.43}{0.50}\right) = -40.7^o$$

Do đó, $A_{y,30}A_{x,30}A_{z,30} = A_{z,\psi}A_{x,\theta}A_{z,\varphi}$ khi φ = 79.15 độ, θ = 41.41 độ, và ψ = −40.7 độ. Nói cách khác, vật thể rắn gắn với hệ tọa độ cục bộ di chuyển đến cấu hình cuối bằng cách trải qua ba vòng lặp liên tiếp xoay φ = 79.15 độ, θ = 41.41 độ, và ψ = −40.7 độ quanh các trục z, x, và z tương ứng, hoặc ba vòng lặp liên tiếp 30 độ, 30 độ, và 30 độ quanh các trục z, x, và y.

Ví dụ 2-15: Ma trận xoay tương đối của hai vật thể.

Xét một vật thể rắn B_1 có ma trận hướng $A_G^{B_1}$ được tạo bởi các góc Euler $\varphi = 30$ độ, $\theta = -45$ độ, $\psi = 60$ độ, và một vật thể rắn khác B_2 có $\varphi = 10$ độ, $\theta = 25$ độ, $\psi = -15$ độ, so với hệ toạ độ toàn cục. Tìm ma trận xoay tương đối $A_{B_2}^{B_1}$ để ánh xạ các tọa độ của khung tọa độ thứ hai B_2 đến khung tọa độ đầu tiên B_1, chúng ta cần tìm trước các ma trận xoay riêng lẻ.

$$A_G^{B_1} = A_{z,60}A_{x,-45}A_{z,30} = \begin{bmatrix} 0.127 & 0.78 & -0.612 \\ -0.927 & -0.127 & -0.354 \\ -0.354 & 0.612 & 0.707 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}74)$$

$$A_G^{B_2} = A_{z,10}A_{x,25}A_{z,-15} = \begin{bmatrix} 0.992 & -0.0633 & -0.109 \\ 0.103 & 0.907 & 0.408 \\ 0.0734 & -0.416 & 0.906 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}75)$$

Ma trận quay cần tìm $A_{B_2}^{B_1}$ được xác định như sau:

$$A_{B_2}^{B_1} = A_G^{B_1}A_{B_2}^G \quad (2\text{-}76)$$

$$A_{B_2}^{B_1} = A_G^{B_1}{A_G^{B_2}}^T = \begin{bmatrix} 0.992 & 0.103 & 0.0734 \\ -0.0633 & 0.907 & -0.416 \\ -0.109 & 0.408 & 0.906 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}77)$$

Ví dụ 2-16: Ma trận xoay Euler cho các góc nhỏ.

Ma trận xoay Euler $A_G^B = A_{z,\psi}A_{x,\theta}A_{z,\varphi}$ cho các góc Euler rất nhỏ φ, θ, và ψ được xấp xỉ bởi:

$$A_G^B = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}78)$$

Trong đó,

$$\gamma = \varphi + \psi \quad (2\text{-}79)$$

Do đó, trong trường hợp góc quay nhỏ, các góc φ và ψ là không thể phân biệt được.

Ví dụ 2-17: Góc Euler thứ hai nhỏ.

Nếu $\theta \rightarrow 0$ thì ma trận quay Euler $A_G^B = A_{z,\psi}A_{x,\theta}A_{z,\varphi}$ tiến gần đến:

$$A_G^B = \begin{bmatrix} c\varphi c\psi - s\varphi s\psi & c\psi s\varphi + c\varphi s\psi & 0 \\ -c\varphi s\psi - c\psi s\varphi & -s\varphi s\psi + s\varphi c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) & 0 \\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}80)$$

Và do đó, các góc φ và ψ không thể phân biệt được ngay cả khi giá trị của φ và ψ là hữu hạn. Do đó, bộ góc Euler trong ma trận quay (2-65) không duy nhất khi $\theta = 0$.

2.2.7. Góc Roll-Pitch-Yaw cục bộ

Quay quanh trục x của khung tọa độ cục bộ được gọi là *roll* hoặc *bank*, quay quanh trục y của khung tọa độ cục bộ được gọi là *pitch* hoặc *attitude*, và quay quanh trục z của khung tọa độ cục bộ được gọi là *yaw*, *spin*, hoặc *heading*. Các góc *roll-pitch-yaw* cục bộ được hiển thị trong Hình 2-11.

Ma trận quay theo các trục *roll-pitch-yaw* cục bộ là:

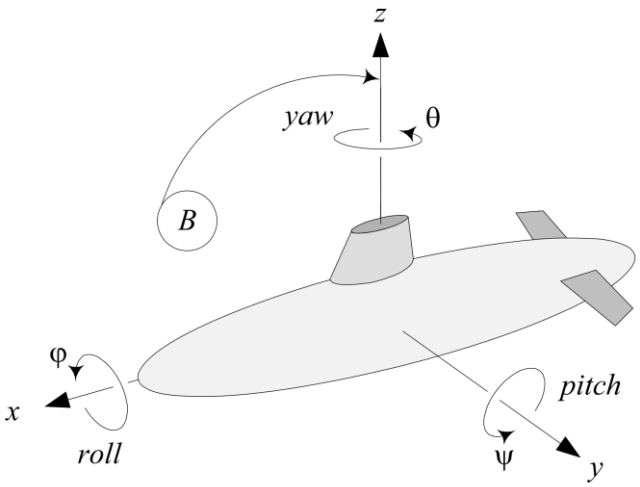
$$A_G^B = A_{z,\psi}A_{y,\theta}A_{x,\varphi} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\varphi s\psi + s\theta c\psi s\varphi & s\theta s\psi \\ -c\theta s\psi & c\varphi c\psi - s\theta s\varphi s\psi & s\theta c\psi \\ s\theta & -c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (2\text{-}81)$$

Sự khác biệt giữa góc *roll-pitch-yaw* và góc Euler, mặc dù chúng ta hiển thị cả hai bằng cách sử dụng φ, θ và ψ.

Ví dụ 2-18: Vận tốc góc và tỷ lệ *roll-pitch-yaw* cục bộ.

Sử dụng các tần số *roll-pitch-yaw*, vận tốc góc của một vật thể B so với hệ tọa độ toàn cục là

$$\begin{aligned} \omega_B^G &= \omega_x\hat{\imath} + \omega_y\hat{\jmath} + \omega_z\hat{k} \\ &= \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\psi}\hat{e}_\psi \end{aligned} \quad (2\text{-}82)$$



Hình 2-11 Góc Roll-Pitch-Yaw cục bộ [1].

Mối quan hệ giữa các thành phần của ω_B^G trong khung tọa độ vật thể và các thành phần *roll-pitch-yaw* được xác định khi vector đơn vị *roll* cục bộ $\hat{e}_\varphi$ và vector đơn vị *pitch* $\hat{e}_\theta$ được

biến đổi sang khung tọa độ vật thể. Vector đơn vị *roll* $\hat{e}_\varphi = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ được biến đổi sang khung tọa độ vật thể sau khi quay một góc θ và sau đó quay một góc ψ.

$$\hat{e}_\varphi^B = A_{z,\psi} A_{y,\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta cos\psi \\ -cos\theta sin\psi \\ sin\theta \end{bmatrix} \tag{2-83}$$

Vector đơn vị *pitch* $\hat{e}_\theta = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ biến đổi sang hệ tọa độ vật thể sau khi xoay một góc ψ.

$$\hat{e}_\theta^B = A_{z,\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\psi \\ cos\psi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-84}$$

Vector đơn vị của trục *yaw* $\hat{e}_\psi = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ đã theo chiều của trục z cục bộ. Do đó, ω_B^G có thể được biểu diễn trong hệ tọa độ vật thể $Oxyz$ là

$$\begin{aligned} {\omega_B^G}^B &= \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} cos\theta cos\psi \\ -cos\theta sin\psi \\ sin\theta \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} sin\psi \\ cos\psi \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta cos\psi & sin\psi & 0 \\ -cos\theta sin\psi & cos\psi & 0 \\ sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-85}$$

Và do đó, ω_B^G trong khung tọa độ toàn cục $OXYZ$ theo các tần số *roll-pitch-yaw* cục bộ là:

$$\begin{aligned} {\omega_B^G}^G &= \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = {A_G^B}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = {A_G^B}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\theta} sin\psi + \dot{\varphi} cos\theta cos\psi \\ \dot{\theta} cos\psi - \dot{\varphi} cos\theta sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} sin\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} + \dot{\psi} sin\theta \\ \dot{\theta} cos\varphi - \dot{\psi} cos\theta sin\varphi \\ \dot{\theta} sin\varphi + \dot{\psi} cos\theta cos\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & sin\theta \\ 0 & cos\varphi & -cos\theta sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\theta cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-86}$$

2.2.8. Phép quay trục cục bộ so với trục toàn cục

Ma trận quay toàn cục Q_B^G bằng với nghịch đảo của ma trận quay cục bộ A_B^G và ngược lại.

$$Q_B^G = {A_G^B}^{-1} \qquad A_G^B = {Q_B^G}^{-1} \tag{2-87}$$

Trong đó,

$$Q_B^G = {A_1}^{-1} {A_2}^{-1} {A_3}^{-1} \cdots {A_n}^{-1} \tag{2-88}$$

$$A_G^B = {Q_1}^{-1} {Q_2}^{-1} {Q_3}^{-1} \cdots {Q_n}^{-1} \tag{2-89}$$

Ngoài ra, việc nhân ma trận quay toàn cục bằng với nhân ma trận quay cục bộ.

Ví dụ 2-19: Vị trí toàn cục và việc nhân với ma trận xoay.

Vị trí cục bộ của một điểm P sau khi quay là tại $r^B = [1 \quad 2 \quad 3]^T$. Nếu ma trận quay cục bộ biến đổi r^G thành r^B được xác định như sau

$$A^B_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos30 & sin30 & 0 \\ -sin30 & cos30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-90}$$

Sau đó, chúng ta có thể tìm vector vị trí toàn cục r^G bằng cách nhân sau $A^B_{z,\varphi}$ vào vector vị trí cục bộ r^B_T.

$$\begin{aligned} r^G_T = r^B_T A^B_{z,\varphi} &= [1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} cos30 & sin30 & 0 \\ -sin30 & cos30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [-0.13 \quad 2.23 \quad 3.0] \end{aligned} \tag{2-91}$$

Thay vì nhân từ trước của ${A^B_{z,\varphi}}^{-1}$ bởi r^B.

$$\begin{aligned} r^G = {A^B_{z,\varphi}}^{-1} r^B &= \begin{bmatrix} cos30 & sin30 & 0 \\ -sin30 & cos30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.13 \\ 2.23 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-92}$$

2.2.9. Biến đổi tổng quát

Xem xét một tình huống chung trong đó hai hệ tọa độ, $G(OXYZ)$ và $B(Oxyz)$, có một gốc chung là O, được sử dụng để biểu diễn các thành phần của một vector r. Luôn tồn tại một ma trận biến đổi R^G_B để ánh xạ các thành phần của r từ hệ tham chiếu $B(Oxyz)$ sang hệ tham chiếu khác $G(OXYZ)$.

$$r^G = R^G_B r^B \tag{2-93}$$

Ngoài ra, ánh xạ nghịch đảo, $r^B = R^G_B r^G$, có thể được thực hiện bằng R^B_G

$$r^B = R^B_G r^G \tag{2-94}$$

Trong đó,

$$\left|R^G_B\right| = \left|R^B_G\right| = 1 \tag{2-95}$$

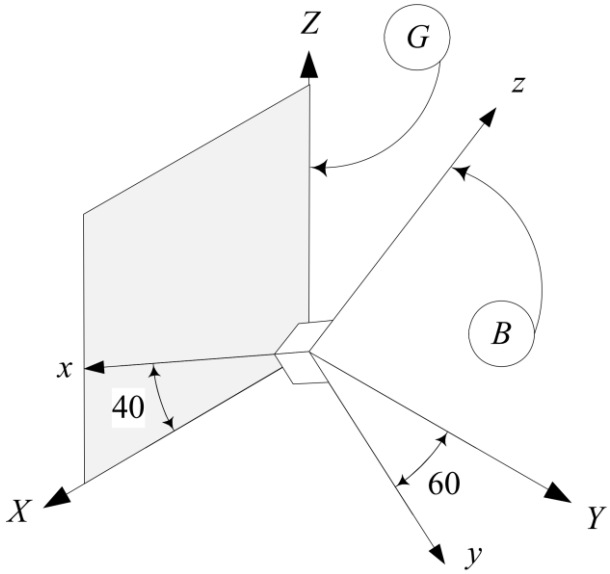
Và

$$R^B_G = {R^G_B}^{-1} = {R^G_B}^T \tag{2-96}$$

Ví dụ 2-20: Các phần tử của ma trận biến đổi.

Vector vị trí r của điểm P có thể được biểu diễn dưới dạng các thành phần của nó đối với khung $G(OXYZ)$ hoặc $B(Oxyz)$. Khung tọa độ vật thể và toàn cục được hiển thị trong Hình 2-12. Nếu $r^G = 100\hat{I} - 50\hat{J} + 150\hat{K}$, và chúng ta đang tìm các thành phần của r trong khung $Oxyz$, thì chúng ta phải tìm ma trận quay thích hợp R^B_G trước.

Các thành phần hàng của R_G^B là các cosin chỉ hướng của các trục $Oxyz$ trong khung tọa độ $OXYZ$. Trục x nằm trong mặt phẳng XZ ở góc 40 độ so với trục X, và góc giữa y và Y là 60 độ. Do đó,



Hình 2-12 Khung tọa độ cục bộ và toàn cục.

$$R_G^B = \begin{bmatrix} \hat{\imath}\cdot\hat{I} & \hat{\imath}\cdot\hat{J} & \hat{\imath}\cdot\hat{K} \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{I} & \hat{\jmath}\cdot\hat{J} & \hat{\jmath}\cdot\hat{K} \\ \hat{k}\cdot\hat{I} & \hat{k}\cdot\hat{J} & \hat{k}\cdot\hat{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos40 & 0 & sin\,40 \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{I} & cos60 & \hat{\jmath}\cdot\hat{K} \\ \hat{k}\cdot\hat{I} & \hat{k}\cdot\hat{J} & \hat{k}\cdot\hat{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.766 & 0 & 0.643 \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{I} & 0.5 & \hat{\jmath}\cdot\hat{K} \\ \hat{k}\cdot\hat{I} & \hat{k}\cdot\hat{J} & \hat{k}\cdot\hat{K} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}97)$$

Và bằng cách sử dụng $R_G^B R_B^G = R_G^B R_G^{B^T} = I$

$$\begin{bmatrix} 0.766 & 0 & 0.643 \\ r_{21} & 0.5 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.766 & r_{21} & r_{31} \\ 0 & 0.5 & r_{32} \\ 0.643 & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}98)$$

Ta thu được một tập hợp các phương trình để tìm các phần tử còn thiếu.

$$\begin{gathered} 0.766r_{21} + 0.643r_{23} = 0 \\ 0.766r_{31} + 0.643r_{33} = 0 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 + 0.25 = 1 \\ r_{21}r_{31} + 0.5r_{32} + r_{23}r_{33} = 0 \\ r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 \end{gathered} \quad (2\text{-}99)$$

Giải các phương trình này ta có ma trận biến đổi sau đây:

$$R_G^B = \begin{bmatrix} 0.766 & 0 & 0.643 \\ 0.557 & 0.5 & -0.663 \\ -0.322 & 0.866 & 0.383 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}100)$$

và sau đó chúng ta có thể tìm ra các thành phần của r^B

$$r^B = R_G^B r^G = \begin{bmatrix} 0.766 & 0 & 0.643 \\ 0.557 & 0.5 & -0.663 \\ -0.322 & 0.866 & 0.383 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ -50 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173.05 \\ -68.75 \\ -18.05 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}101)$$

Ví dụ 2-21: Vị trí toàn cục, sử dụng r^B và R_G^B.

Vector vị trí r của một điểm P có thể được mô tả trong khung $G(OXYZ)$ hoặc $B(Oxyz)$. Nếu $r^B = 100\hat{I} - 50\hat{J} + 150\hat{K}$ và ma trận biến đổi R_G^B sau đây là ma trận biến đổi để ánh xạ r^G thành r^B.

$$r^B = R_G^B r^G = \begin{bmatrix} 0.766 & 0 & 0.643 \\ 0.557 & 0.5 & -0.663 \\ -0.322 & 0.866 & 0.383 \end{bmatrix} r^G \quad (2\text{-}102)$$

Khi đó các thành phần của r^G trong $G(OXYZ)$ sẽ là

$$r^G = R_B^G r^B = R_G^{B\,T} r^B = \begin{bmatrix} 0.766 & 0.557 & -0.322 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0.643 & -0.663 & 0.383 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ -50 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 104.9 \\ 154.9 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}103)$$

Ví dụ 2-22: Ma trận biến đổi hai điểm.

Vector vị trí toàn cục của hai điểm, P_1 và P_2, trên một vật thể rắn B là:

$$r_{P_1}^G = \begin{bmatrix} 1.077 \\ 1.365 \\ 2.666 \end{bmatrix} \qquad r_{P_2}^G = \begin{bmatrix} -0.473 \\ 2.239 \\ -0.959 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}104)$$

Gốc của vật thể $B(Oxyz)$ cố định trên nguồn gốc của $G(OXYZ)$, và các điểm P_1 và P_2 nằm trên trục x cục bộ và trục y tương ứng.

Để tìm R_B^G, chúng ta sử dụng các vector đơn vị cục bộ $\hat{\imath}^G$ và $\hat{\jmath}^G$.

$$\hat{\imath}^G = \frac{r_{P_1}^G}{|r_{P_1}^G|} = \begin{bmatrix} 0.338 \\ 0.429 \\ 0.838 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}105)$$

$$\hat{\jmath}^G = \frac{r_{P_2}^G}{|r_{P_2}^G|} = \begin{bmatrix} -0.191 \\ 0.902 \\ -0.387 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}106)$$

để xác định được $\hat{k}^G$

$$\hat{k}^G = \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \tilde{\imath}\hat{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 & -0.838 & 0.429 \\ 0.838 & 0 & -0.338 \\ -0.429 & 0.338 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.191 \\ 0.902 \\ -0.387 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.922 \\ -0.029 \\ 0.387 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}107)$$

Trong đó, $\tilde{\imath}$ là ma trận không chéo tương ứng với $\hat{\imath}$, và $\tilde{\imath}\hat{\jmath}$ là một lựa chọn khác cho phép nhân vector của $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$.

Do đó, ma trận biến đổi sử dụng tọa độ của hai điểm $r_{P_1}^G$ và $r_{P_2}^G$ sẽ là:

$$R_B^G = [\hat{\imath}^G \quad \hat{\jmath}^G \quad \hat{k}^G] = \begin{bmatrix} 0.338 & -0.191 & -0.922 \\ 0.429 & 0.902 & -0.029 \\ 0.838 & 0.387 & 0.387 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}108)$$

Ví dụ 2-23: Dạng không đổi của vector vị trí theo độ dài.

Mô tả một vector trong các khung tọa độ khác nhau bằng cách sử dụng ma trận quay không ảnh hưởng đến các thuộc tính về độ dài và hướng của vector. Do đó, độ dài của một vector là một đại lượng không biến đổi.

$$|r| = |r^G| = |r^B| \tag{2-109}$$

Đặc tính không đổi về độ dài có thể được chứng minh bằng cách

$$|r|^2 = {r^G}^T r^G = [R_B^G r^B]^T R_B^G r^B = {r^B}^T {R_B^G}^T R_B^G r^B = {r^B}^T r^B \tag{2-110}$$

Ví dụ 2-24: Ma trận chéo đối xứng cho $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, và $\hat{k}$.

Định nghĩa của ma trận chéo đối xứng $\tilde{a}$ tương ứng với một vector a được xác định bởi

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-111}$$

Do đó,

$$\tilde{\imath} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-112}$$

$$\tilde{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-113}$$

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-114}$$

2.2.10. Biến đổi bị động và chủ động

Quá trình quay của một khung tọa độ cục bộ khi vector vị trí r^G của điểm P được cố định trong khung tọa độ toàn cục và không quay cùng với khung tọa độ cục bộ, được gọi là biến đổi bị động. Hoặc có thể, quá trình quay của một khung tọa độ cục bộ khi vector vị trí r^B của điểm P được cố định trong khung tọa độ cục bộ và quay cùng với khung tọa độ cục bộ, được gọi là biến đổi chủ động. Các biến đổi bị động và chủ động là tương đương toán học. Nói cách khác, ma trận quay cho một khung tọa độ quay và vector quay (biến đổi chủ động) là giống như ma trận quay cho một khung tọa độ quay và vector cố định (biến đổi bị động).

Ví dụ 2-25: Phép quay chủ động và bị động quanh trục X.

Xem xét các khung tọa độ cục bộ và toàn cục B và G trùng khớp. Một điểm P của vật thể nằm ở vị trí r^B.

$$r^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-115}$$

Xoay 45 độ quanh trục X sẽ di chuyển điểm đến r^G.

$$r^G = R_{X,90} r^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\frac{\pi}{2} & -sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & sin\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}116)$$

Giả sử P cố định trong G. Khi B xoay 90 độ quanh trục X, các tọa độ của P trong hệ tọa độ cục bộ sẽ thay đổi như sau:

$$r^B = R_{X,-90} r^G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\frac{-\pi}{2} & -sin\frac{-\pi}{2} \\ 0 & sin\frac{-\pi}{2} & cos\frac{-\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}117)$$

2.2.11. Bài tập

1. Điểm P nằm ở $r_P^B = [1, 2, 1]^T$, trong hệ tọa độ của vật thể $B(Oxyz)$. Tìm vị trí toàn cục cuối cùng của P sau khi

a. Quay một góc 30 độ quanh trục X, tiếp theo là quay một góc 45 độ quanh trục Z.

b. Quay một góc 30 độ quanh trục Z, tiếp theo là quay một góc 45 độ quanh trục X.

2. Tọa độ của một điểm trên vật thể P trong các khung tọa độ B và G là:

$$r_P^B = \begin{bmatrix} 1.23 \\ 4.56 \\ 7.89 \end{bmatrix} \qquad r_P^G = \begin{bmatrix} 4.56 \\ 7.89 \\ 1.23 \end{bmatrix}$$

Xác định:

a. Có thể biến đổi r_P^B thành r_P^G được không?

b. Ma trận biến đổi giữa hệ tọa độ r_P^B và r_P^G.

c. Góc Euler để biến đổi r_P^B thành r_P^G.

d. Góc *roll-pitch-yaw* toàn cục để biến đổi r_P^B thành r_P^G.

e. Góc *roll-pitch-yaw* vật thể để biến đổi r_P^B thành r_P^G.

3. Tìm vị trí của điểm P trong hệ tọa độ cục bộ, nếu nó được di chuyển đến $r_P^G = [1, 3, 2]^T$ sau khi

a. Quay một góc 60 độ quanh trục Z.

b. Quay một góc 60 độ quanh trục X.

c. Quay một góc 60 độ quanh trục Y.

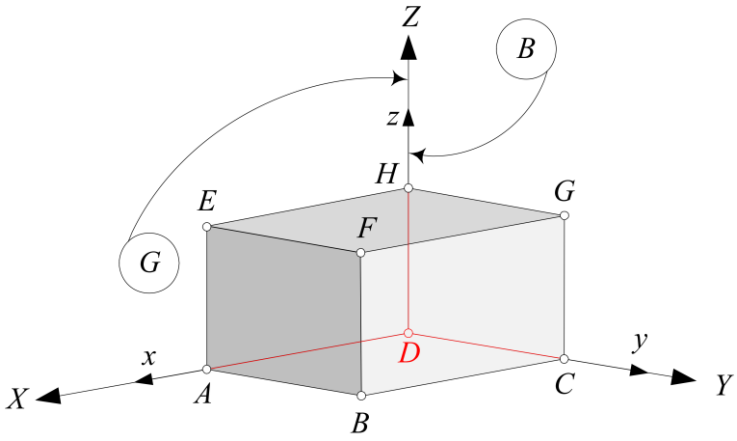
d. Quay một góc 60 độ quanh trục Z, một góc 60 độ quanh trục X, một góc 60 độ quanh trục Y.

4. Một điểm nằm tại $r_P^B = [1, 2, z]^T$. Sau phép quay một góc 60 độ quanh trục X, tiếp theo là phép quay một góc 30 độ quanh trục Z, nó sẽ nằm ở:

$$r_P^G = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 2.933 \end{bmatrix}$$

Tìm $Z, X,$ và Y.

5. Hình 2-13 minh họa vị trí ban đầu của một khối lập phương có một điểm cố định tại D và các cạnh có độ dài $l = 1$.



Hình 2-13 Khối lập phương ở vị trí ban đầu

Xác định:

a. Tọa độ của các góc sau khi quay 30 độ quanh trục X.

b. Tọa độ của các góc sau khi quay 30 độ quanh trục Y.

c. Tọa độ của các góc sau khi quay 30 độ quanh trục Z.

d. Tọa độ của các góc sau khi quay 30 độ quanh trục X, một góc 30 độ quanh trục Y, một góc 30 độ quanh trục Z.

6. Chứng minh rằng độ dài của một vector sẽ không thay đổi khi quay.

$$|r^G| = \left|R_B^G r^B\right|$$

Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai điểm trên vật thể sẽ không thay đổi khi quay.

$$|{p_1}^B - {p_2}^B| = \left|R_B^G {p_1}^B - R_B^G {p_2}^B\right|$$

7. Quay $r_P^B = [2,2,3]^T$, một góc 60 độ quanh trục X, tiếp theo là 30 độ quanh trục Z. Sau đó, lặp lại chuỗi quay 60 độ quanh trục X, tiếp theo là 30 độ quanh trục Z. Sau bao nhiêu lần quay, điểm P sẽ quay trở lại vị trí toàn cục ban đầu của nó?

8. Tính toán các ma trận quay roll-pitch-yaw toàn cục và cục bộ Q và A cho việc quay 30 độ quanh các trục chính. Các ma trận có chuyển vị lẫn nhau không? Tính toán ma trận quay cục bộ A bằng cách quay quanh trục z, sau đó là trục y và cuối cùng là trục x. Liệu chuyển vị của ma trận A mới có phải là chuyển vị của ma trận roll-pitch-yaw toàn cục không?

9. Tính các góc roll, pitch, và yaw cho ma trận quay sau:

$$R_B^G = \begin{bmatrix} 0.53 & -0.84 & 0.13 \\ 0.0 & 0.15 & 0.99 \\ -0.85 & -0.52 & 0.081 \end{bmatrix}$$

10. Xác định các tọa độ toàn cục của một điểm trên vật thể $r_P^B = [2,2,3]^T$ sau khi

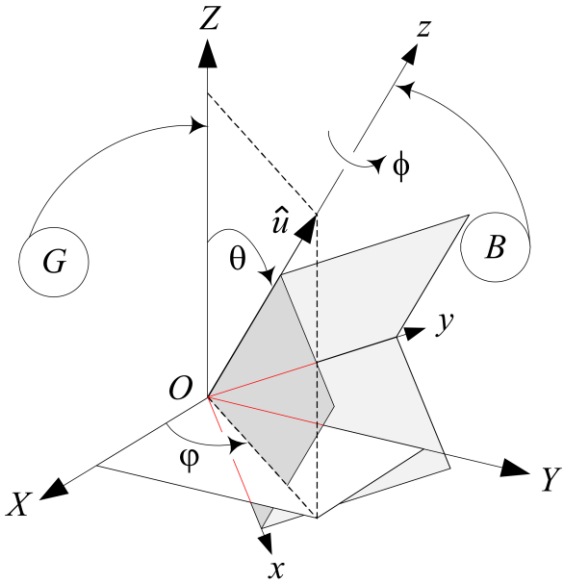
a. Quay một góc 60 độ quanh trục x tiếp theo là 60 độ quanh trục z.

b. Quay một góc 60 độ quanh trục z tiếp theo là 60 độ quanh trục x.

c. Quay một góc 60 độ xoay quanh trục z, tiếp theo là 60 độ xoay quanh trục x, và cuối cùng là một quay 60 độ xoay quanh trục z.

2.3. Động học hướng

Ta có thể phân tích bất kỳ phép quay ϕ của một vật thể rắn có điểm cố định O, xoay quanh một trục được cố định toàn cục $\hat{u}$ thành ba phép quay về ba trục không phẳng. Hơn nữa, hướng cuối cùng của một vật thể rắn sau một số lượng hữu hạn các phép quay tương đương với một phép quay duy nhất về một trục duy nhất. Xác định góc và trục được gọi là động học hướng của các vật thể rắn.



Hình 2-14 Trục quay û khi nó trùng với trục z cục bộ.

2.3.1. Quay trục - góc

Hai tham số cần thiết để xác định hướng của một đường thẳng qua O và một tham số cần thiết để xác định số lượng quay của một vật thể rắn xung quanh đường thẳng này. Đặt hệ tọa độ của vật thể là $B(Oxyz)$ quay ϕ về phía một đường thẳng được xác định bởi một vector đơn vị $\hat{u}$ với cosin hướng u_1, u_2, u_3.

$$\hat{u} = u_1\hat{I} + u_2\hat{J} + u_3\hat{K} \tag{2-118}$$

$$\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} = 1 \tag{2-119}$$

Đây được gọi là biểu diễn trục-góc của một phép quay.

Một ma trận biến đổi R_B^G chuyển đổi các tọa độ trong hệ tọa độ cục bộ $B(Oxyz)$ thành các tọa độ tương ứng trong hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$.

$$r^G = R_B^G r^B \tag{2-120}$$

Là:

$$R_B^G = R_{\hat{u},\phi} = I\cos\phi + \hat{u}\hat{u}^T vers\phi + \tilde{u}\sin\phi \tag{2-121}$$

$$R_B^G = \begin{bmatrix} {u_1}^2 vers\phi + c\phi & u_1u_2 vers\phi - u_3 s\phi & u_1u_2 vers\phi + u_2 s\phi \\ u_1u_2 vers\phi + u_3 s\phi & {u_2}^2 vers\phi + c\phi & u_2u_3 vers\phi - u_1 s\phi \\ u_1u_3 vers\phi - u_2 s\phi & u_2u_3 vers\phi + u_1 s\phi & {u_3}^2 vers\phi + c\phi \end{bmatrix} \tag{2-122}$$

Trong đó,

$$vers\phi = \text{versine}\phi = 1 - \cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2} \tag{2-123}$$

và $\tilde{u}$ là ma trận lệch tương ứng vector $\hat{u}$.

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -a_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-124}$$

Ma trận $\tilde{u}$ là ma trận chéo đối xứng nếu

$$\tilde{u}^T = -\tilde{u} \tag{2-125}$$

Ma trận biến đổi (2-122) là ma trận quay tổng quát nhất cho một khung tọa độ cục bộ quay liên quan đến một khung tọa độ toàn cục.

Dựa vào ma trận biến đổi R_B^G, chúng ta có thể xác định được trục $\hat{u}$ và góc quay ϕ của phép xoay bằng cách:

$$\tilde{u} = \frac{1}{2sin\phi}\left(R_B^G - R_B^{G\,T}\right) \tag{2-126}$$

$$cos\phi = \frac{1}{2}(tr(R_B^G) - 1) \tag{2-127}$$

Ví dụ 2-26: Quay theo trục-góc khi $\hat{u} = \hat{K}$.

Nếu hệ tọa độ cục bộ $B(Oxyz)$ quay quanh trục Z, thì

$$\hat{u} = \hat{K} \tag{2-128}$$

và ma trận biến đổi (2-122) giảm xuống thành:

$$\begin{aligned} R_B^G &= \begin{bmatrix} 0vers\phi + \cos\phi & 0vers\phi - 1\sin\phi & 0vers\phi + 0\sin\phi \\ 0vers\phi + 1\sin\phi & 0vers\phi + \cos\phi & 0vers\phi - 0\sin\phi \\ 0vers\phi - 0\sin\phi & 0vers\phi + 0\sin\phi & 1vers\phi + \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-129}$$

Tương đương với ma trận xoay quanh trục Z của khung tọa độ toàn cục.

Ví dụ 2-27: Xoay quanh một trục cục bộ đã được xoay.

Nếu hệ tọa độ của cơ thể $Oxyz$ xoay φ độ quanh trục Z toàn cục, thì trục x sẽ nằm dọc theo $\hat{u}_x$.

$$\hat{u}_x = R_{Z,\varphi}^G \hat{\imath} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-130}$$

Phép quay θ xoay quanh $\hat{u}_x = (\cos\varphi)\hat{I} + (\sin\varphi)\hat{J}$ được xác định bằng công thức Rodriguez (2-122).

$$R_B^G = \begin{bmatrix} cos^2\varphi vers\theta + \cos\theta & cos\varphi sin\varphi vers\theta & sin\varphi sin\theta \\ cos\varphi sin\varphi vers\theta & sin^2\varphi vers\theta + \cos\theta & -cos\varphi sin\theta \\ -sin\varphi sin\theta & cos\varphi sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2\text{-}131)$$

Bây giờ, quay một góc φ xoay quanh trục Z toàn cục, tiếp theo là quay một góc θ xoay quanh trục x cục bộ được chuyển đổi bởi

$$R_B^G = R_{\hat{u}_x,\theta}^G R_{Z,\varphi}^G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & sin\theta sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -cos\varphi sin\theta \\ 0 & sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2\text{-}132)$$

Mà phải bằng $[A_{x,\theta}A_{z,\varphi}]^{-1} = {A_{z,\varphi}}^T {A_{x,\theta}}^T$.

Ví dụ 2-28: Trục và góc quay.

Xem xét một vật thể rắn hình lập phương có một điểm cố định tại A và độ dài cạnh bằng một đơn vị như được thể hiện trong Hình 2-15. Nếu chúng ta xoay hình lập phương 45 độ xung quanh vector u.

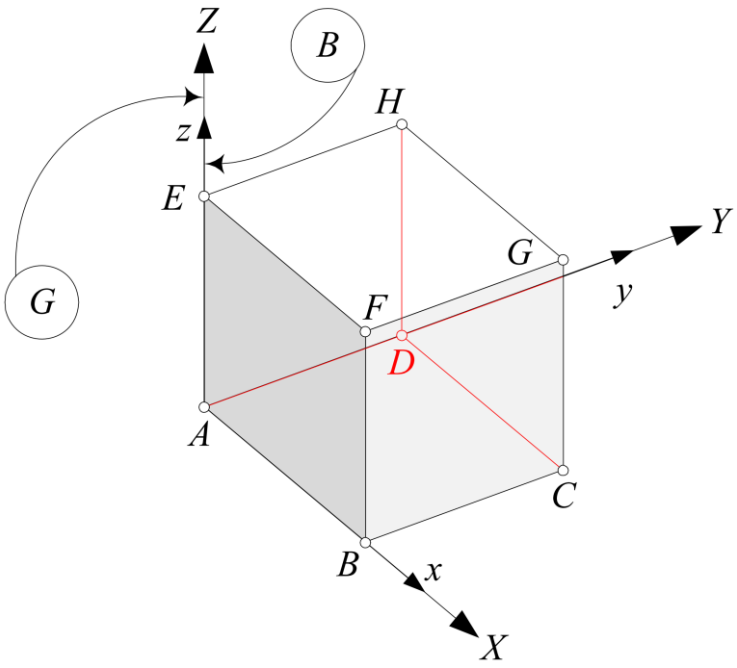
$$u = [1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (2\text{-}133)$$

Sau đó, chúng ta có thể tìm các tọa độ toàn cục góc của nó bằng cách sử dụng ma trận biến đổi Rodriguez.

$$\phi = \frac{\pi}{4} \qquad \hat{u} = \frac{u}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}134)$$

$$R_{\hat{u},\phi} = I cos\phi + \hat{u}\hat{u}^T vers\phi + \tilde{u} sin\phi$$

$$= \begin{bmatrix} 0.80474 & -0.31062 & 0.50588 \\ 0.50588 & 0.80474 & -0.31062 \\ -0.31062 & 0.50588 & 0.80474 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}135)$$



Hình 2-15 Khối lập phương có một điểm cố định tại A.

Các tọa độ cục bộ của các góc là:

	r_B^B	r_C^B	r_D^B	r_E^B	r_F^B	r_G^B	r_H^B
x	1	1	0	0	1	1	0
y	0	1	1	0	0	1	1
z	0	0	0	1	1	1	1

Và do đó, sử dụng $r^G = R_{\hat{u},\phi} r^B$ là tọa độ toàn cục của các góc sau khi xoay là:

	r_B^G	r_C^G	r_D^G	r_E^G	r_F^G	r_G^G	r_H^G
X	0.804	0.495	−0.31	0.505	1.310	1	0.196
Y	0.505	1.31	0.804	−0.31	0.196	1	0.495
Z	−0.31	0.196	0.505	0.804	0.495	1	1.31

Điểm G nằm trên trục quay, vì vậy tọa độ của nó sẽ không thay đổi. Các điểm B, D, F và H nằm trong một mặt phẳng đối xứng được xác định bởi $\hat{u}$. Do đó, chúng sẽ di chuyển trên một đường tròn. Để kiểm tra, chúng ta có thể tìm điểm giữa của BH, hoặc FG và xem xem nó có nằm trên trục $\hat{u}$ hay không. Gọi điểm giữa của khối hộp là P.

$$r_P^B = \frac{1}{2}(r_B^B + r_H^B) = \frac{1}{2}(r_F^B + r_D^B) = \begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{bmatrix} \quad (2\text{-}136)$$

$$r_P^G = \frac{1}{2}(r_B^G + r_H^G) = \frac{1}{2}(r_F^G + r_D^G) = \begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{bmatrix} \quad (2\text{-}137)$$

Ví dụ 2-29: Trục và góc của ma trận quay.

Một hệ tọa độ của vật thể, B, trải qua ba phép quay Euler $(\varphi, \theta, \psi) = (30, 45, 60)$ độ so với một hệ tọa độ toàn cục G. Ma trận quay để biến đổi tọa độ của B sang G là:

$$R_B^G = {R_B^G}^T = \left[R_{z,\psi} R_{x,\theta} R_{z,\varphi}\right]^T = {R_{z,\varphi}}^T {R_{x,\theta}}^T {R_{z,\psi}}^T$$
$$= \begin{bmatrix}0.12683 & -0.92678 & 0.35355\\0.78033 & -0.12683 & -0.61237\\0.61237 & 0.35355 & 0.70711\end{bmatrix} \quad (2\text{-}138)$$

Độ nghiêng-trục quay duy nhất của ma trận quay này sau đó có thể được xác định bằng Công thức (2-126) và (2-127).

$$\phi = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}(tr(R_B^G) - 1)\right) \quad (2\text{-}139)$$
$$= cos^{-1}(-0.14645) = 98^o$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2sin\phi}\left(R_B^G - {R_B^G}^T\right) \quad (2\text{-}140)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0 & -0.86285 & -0.13082 \\ 0.86285 & 0.0 & -0.61237 \\ 0.13082 & 0.48822 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0.48822 \\ -0.13082 \\ 0.86285 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}141)$$

Chúng ta có thể xác minh công thức quay góc-trục và suy ra ma trận quay tương tự.

$$R_B^G = R_{\hat{u},\phi} = I cos\phi + \hat{u}\hat{u}^T vers\phi + \tilde{u} sin\phi$$

$$= \begin{bmatrix} 0.12682 & -0.92677 & 0.35354 \\ 0.78032 & -0.12683 & -0.61237 \\ 0.61236 & 0.35355 & 0.70709 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}142)$$

Ví dụ 2-30: Xoay một vật thể đã được xoay.

Một vật thể rắn B đã quay một góc 30 độ quanh trục Y. Chúng ta cần quay vật thể thêm 45 độ quanh trục $\hat{u}$.

$$\hat{u} = \hat{u}_G = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{I} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{J} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{K} \quad (2\text{-}143)$$

Do phép quay đầu tiên, chúng ta có:

$$R_0^G = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}144)$$

Sử dụng công thức xoay cuối cùng dưới đây, ta có thể xác định ma trận biến đổi xoay cần thiết là:

$$R_{\hat{u},\phi}^G = I cos\phi + [\hat{u}\hat{u}^T] vers\phi + \tilde{u} sin\phi$$

$$= \begin{bmatrix} 0.80474 & -0.31062 & 0.50588 \\ 0.50588 & 0.80474 & -0.31062 \\ -0.31062 & 0.50588 & 0.80474 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}145)$$

$$R_B^G = R_{\hat{u},\phi}^G R_0^G$$

$$= \begin{bmatrix} 0.44399 & -0.31062 & 0.80474 \\ 0.59341 & 0.80474 & -1.6065 \times 10^{-2} \\ -0.67137 & 0.50588 & 0.54162 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}146)$$

2.3.2. Tham số Euler

Giả sử ϕ là góc quay của khung tọa độ cục bộ $B(Oxyz)$ quanh $\hat{u} = u_1\hat{I} + u_2\hat{J} + u_3\hat{K}$ liên quan đến khung tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$. Sự tồn tại của một trục quay như vậy là thể hiện phân tích của Định lý Euler về phép quay của vật thể rắn: sự di chuyển tổng quát nhất của một vật thể rắn với một điểm cố định là phép quay quanh một trục nào đó.

Để tìm trục và góc quay, chúng ta đưa ra các tham số Euler e_0, e_1, e_2, e_3 sao cho e_0 là một số vô hướng và e_1, e_2, e_3 là các thành phần của một vector e.

$$e_0 = cos\frac{\phi}{2} \tag{2-147}$$

$$e = e_1\hat{I} + e_2\hat{J} + e_3\hat{K} = \hat{u}sin\frac{\phi}{2} \tag{2-148}$$

Và,

$$e_1{}^2 + e_2{}^2 + e_3{}^2 + e_0{}^2 = e_0{}^2 + e^Te = 1 \tag{2-149}$$

Sau đó, ma trận biến đổi R_B^G để thỏa mãn phương trình $r^G = R_B^G r^B$ có thể được suy ra bằng cách sử dụng các tham số Euler.

$$R_B^G = R_{\hat{u},\phi} = (e_0{}^2 - e^2)I + 2ee^T + 2e_0\tilde{e}$$

$$= \begin{bmatrix} e_0{}^2 + e_1{}^2 - e_2{}^2 - e_3{}^2 & 2(e_1e_2 - e_0e_3) & 2(e_0e_2 + e_1e_3) \\ 2(e_0e_3 + e_1e_2) & e_0{}^2 - e_1{}^2 + e_2{}^2 - e_3{}^2 & 2(e_2e_3 - e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 - e_0e_2) & 2(e_0e_1 + e_2e_3) & e_0{}^2 - e_1{}^2 - e_2{}^2 + e_3{}^2 \end{bmatrix} \tag{2-150}$$

Trong đó $\tilde{e}$ là ma trận chéo không đối xứng tương ứng với e được định nghĩa dưới đây.

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-151}$$

Cho một ma trận biến đổi R_B^G, chúng ta có thể thu được các tham số Euler bằng cách:

$$e_0{}^2 = \frac{1}{4}(tr(R_B^G) + 1) \tag{2-152}$$

$$\tilde{e} = \frac{1}{4e_0}\left(R_B^G - R_B^{G\,T}\right) \tag{2-153}$$

và xác định góc quay ϕ và trục quay $\hat{u}$.

$$cos\phi = \frac{1}{2}(tr(R_B^G) - 1) \tag{2-154}$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2sin\phi}\left(R_B^G - R_B^{G\,T}\right) \tag{2-155}$$

Các tham số Euler cung cấp một mô tả quay phù hợp, cho các phép quay tùy ý và rộng.

Ví dụ 2-31: Phép quay trục-góc của R_B^G.

Các tham số Euler cho phép xoay ϕ = 30 độ quanh trục $\hat{u} = \left(\hat{I} + \hat{J} + \hat{K}\right)/\sqrt{3}$ là

$$e_0 = cos\frac{30}{2} = 0.966 \tag{2-156}$$

$$e = \hat{u}sin\frac{\phi}{2} = e_1\hat{I} + e_2\hat{J} + e_3\hat{K} = 0.149\left(\hat{I} + \hat{J} + \hat{K}\right) \tag{2-157}$$

Do đó, ma trận biến đổi tương ứng là R_B^G là:

$$R_B^G = \begin{bmatrix} 0.91 & -0.244 & 0.333 \\ 0.333 & 0.91 & -0.244 \\ -0.244 & 0.333 & 0.91 \end{bmatrix} \tag{2-158}$$

Ví dụ 2-32: Mối quan hệ giữa các tham số Euler và góc Euler.

So sánh ma trận quay góc Euler (2-65) và ma trận biến đổi tham số Euler (2-150), chúng ta có thể xác định các mối quan hệ sau giữa góc Euler và tham số Euler.

$$e_0 = cos\frac{\theta}{2}cos\frac{\psi+\varphi}{2} \tag{2-159}$$

$$e_1 = sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\psi-\varphi}{2} \tag{2-160}$$

$$e_2 = sin\frac{\theta}{2}sin\frac{\psi-\varphi}{2} \tag{2-161}$$

$$e_3 = cos\frac{\theta}{2}sin\frac{\psi+\varphi}{2} \tag{2-162}$$

Hoặc

$$\varphi = cos^{-1}\frac{2(e_2e_3+e_0e_1)}{sin\,\theta} \tag{2-163}$$

$$\theta = cos^{-1}[2(e_0^2+e_3^2)-1] \tag{2-164}$$

$$\psi = cos^{-1}\frac{-2(e_2e_3-e_0e_1)}{sin\,\theta} \tag{2-165}$$

2.3.3. Xác định các tham số Euler

Giả sử cho một ma trận biến đổi

$$R_B^G = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{22} & r_{31} \end{bmatrix} \tag{2-166}$$

Ta có thể tìm được các tham số Euler e_0, e_1, e_2, e_3 và chỉ ra trục và góc quay bằng cách sử dụng một trong bốn bộ phương trình sau đây:

$$\begin{aligned} e_0 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{21}} \\ e_1 &= \frac{1}{4}\frac{r_{32}-r_{23}}{e_0} \\ e_2 &= \frac{1}{4}\frac{r_{13}-r_{31}}{e_0} \\ e_3 &= \frac{1}{4}\frac{r_{21}-r_{12}}{e_0} \end{aligned} \tag{2-167}$$

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{4}\frac{r_{32}+r_{23}}{e_1} \\ e_1 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{21}} \\ e_2 &= \frac{1}{4}\frac{r_{21}+r_{12}}{e_1} \end{aligned} \tag{2-168}$$

$$e_3 = \frac{1}{4}\frac{r_{31} + r_{13}}{e_1}$$
$$e_0 = \frac{1}{4}\frac{r_{13} - r_{31}}{e_2}$$
$$e_1 = \frac{1}{4}\frac{r_{21} + r_{12}}{e_2}$$
$$e_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}} \quad (2\text{-}169)$$
$$e_3 = \frac{1}{4}\frac{r_{32} + r_{23}}{e_2}$$
$$e_0 = \frac{1}{4}\frac{r_{21} - r_{12}}{e_3}$$
$$e_1 = \frac{1}{4}\frac{r_{31} + r_{13}}{e_3}$$
$$e_2 = \frac{1}{4}\frac{r_{32} + r_{23}}{e_3} \quad (2\text{-}170)$$
$$e_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}}$$

Mặc dù Công thức (2-167) - (2-170) trình bày bốn bộ giải pháp khác nhau, nhưng các tham số Euler kết quả e_0, e_1, e_2, e_3 của chúng là giống nhau. Do đó, sai số số học có thể được giảm thiểu bằng cách sử dụng bộ với ước số chung lớn nhất.

Dấu cộng và dấu trừ là quay một góc ϕ về phía trước quanh $\hat{u}$ và quay một góc $-\phi$ về phía sau quanh $-\hat{u}$.

Ví dụ 2-33: Các tham số Euler từ ma trận R_B^G.

Cho một ma trận biến đổi

$$R_B^G = \begin{bmatrix} 0.5449 & -0.5549 & 0.6285 \\ 0.3111 & 0.8299 & -0.4629 \\ -0.7785 & -0.0567 & 0.6249 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}171)$$

Để tính các tham số Euler tương ứng, chúng ta sử dụng Phương trình (2-167) và tìm ra.

$$tr(R_B^G) = r_{11} + r_{22} + r_{33}$$
$$= 0.5449 + 0.8299 + 0.6249 = 1.9997 \quad (2\text{-}172)$$

Do đó,

$$e_0 = \sqrt{(tr(R_B^G) + 1)/4} = 0.866 \quad (2\text{-}173)$$

Và

$$e_0 = -0.15 \qquad e_2 = 0.406 \qquad e_3 = 0.25 \quad (2\text{-}174)$$

Ví dụ 2-34: Khi có một trong các tham số Euler.

Xem xét ma trận xoay Euler tham số (2-150) tương ứng với việc xoay ϕ quanh một trục được chỉ định bởi một vector đơn vị $\hat{u}$. Các phần tử ngoài đường chéo của R_B^G.

$$\begin{aligned} e_0e_1 &= \frac{1}{4}(r_{32} - r_{23}) \\ e_0e_2 &= \frac{1}{4}(r_{13} - r_{31}) \\ e_0e_3 &= \frac{1}{4}(r_{21} - r_{12}) \\ e_1e_2 &= \frac{1}{4}(r_{12} + r_{21}) \\ e_1e_3 &= \frac{1}{4}(r_{13} + r_{31}) \\ e_2e_3 &= \frac{1}{4}(r_{23} + r_{32}) \end{aligned} \tag{2-175}$$

Có thể sử dụng để tìm e_i, với $i = 0, 1, 2, 3$ nếu chúng ta đã biết một trong số chúng.

Ví dụ 2-35: Các tham số Euler theo phương pháp của Stanley.

Theo một phương pháp được phát triển bởi Stanley, chúng ta có thể đầu tiên tìm thấy bốn e^2.

$$\begin{aligned} e_0^2 &= \frac{1}{2}\left(1 + tr(R_B^G)\right) \\ e_1^2 &= \frac{1}{4}\left(1 + 2r_{11} - tr(R_B^G)\right) \\ e_2^2 &= \frac{1}{4}\left(1 + 2r_{22} - tr(R_B^G)\right) \\ e_3^2 &= \frac{1}{4}\left(1 + 2r_{33} - tr(R_B^G)\right) \end{aligned} \tag{2-176}$$

Và lấy căn bậc hai dương của e_i^2 lớn nhất. Sau đó, các e_i khác được xác định bằng cách chia ba phương trình phù hợp từ sáu phương trình (2-175) cho e_i lớn nhất.

2.3.4. Spinor và Rotator

Các phép xoay hữu hạn có thể được biểu diễn theo hai cách tổng quát: sử dụng ma trận vuông 3×3 thực hữu hạn R gọi là *rotator*, viết tắt của tensor xoay; và sử dụng ma trận chéo đối xứng 3×3 thực $\tilde{u}$ gọi là *spinor*, viết tắt của tensor xoay spin.

Một rotator là một toán tử tuyến tính chuyển từ r^B sang r^G khi một trục quay $\hat{u}$ và một góc quay ϕ được cho trước:

$$r^G = R_B^G r^B \tag{2-177}$$

Spinor $\tilde{u}$ tương ứng với vector $\hat{u}$, mà cùng với ϕ, có thể được sử dụng để mô tả một phép quay.

$$R_B^G = (I cos\phi + \hat{u}\hat{u}^T vers\phi + \tilde{u} sin\phi) \tag{2-178}$$

Phát triển lý thuyết cho các vector không đơn vị xác định trục xoay. Bình phương của $\tilde{u}$, tính thông qua phép nhân trực tiếp, là

$$\begin{aligned} \tilde{u}^2 &= \begin{bmatrix} -u_2^2-u_3^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & -u_1^2-u_3^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & -u_1^2-u_2^2 \end{bmatrix} \\ &= -\tilde{u}\tilde{u}^T = -\tilde{u}^T\tilde{u} \\ &= \hat{u}\hat{u}^T - u^2 I \end{aligned} \tag{2-179}$$

Đây là một ma trận đối xứng với $tr[\tilde{u}^2] = -2|\hat{u}|^2 = -2u^2 = -2(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$ với các trị riêng là $0, -u^2, -u^2$. Nói cách khác, $\tilde{u}$ thỏa mãn phương trình đặc trưng của nó.

$$\tilde{u}^2 = u^2 I\ ,\ \tilde{u}^3 = -u^2\tilde{u}, \cdots, \tilde{u}^n = -u^2\tilde{u}^{n-2}, n \geq 3 \tag{2-180}$$

Các lũy thừa lẻ của $\tilde{u}$ là không đối xứng với các giá trị riêng thuần ảo phân biệt, trong khi các lũy thừa chẵn của $\tilde{u}$ là đối xứng với các giá trị riêng thực lặp lại.

Spinors và rotators là hàm của nhau nên R phải có thể được mở rộng trong một dãy Taylor của $\tilde{u}$.

$$R = I + c_1\tilde{u} + c_2\tilde{u}^2 + c_3\tilde{u}^3 + \cdots \tag{2-181}$$

$$R = I + c_1\tilde{u} + c_2\tilde{u}^2 + c_3\tilde{u}^3 + \cdots \tag{2-182}$$

Tuy nhiên, do (2-180), tất cả các lũy thừa bậc ba trở lên có thể được loại bỏ. Do đó, R phải là một hàm tuyến tính của I, $\tilde{u}$ và $\tilde{u}^2$.

$$\begin{aligned} R = I + a(\lambda\tilde{u}) + b(\lambda\tilde{u})^2 = \\ \begin{bmatrix} -b\lambda^2(u_2^2+u_3^2)+1 & -a\lambda u_3 + b\lambda^2u_1u_2 & a\lambda u_2 + b\lambda^2u_1u_3 \\ a\lambda u_3 + b\lambda^2u_1u_2 & -b\lambda^2(u_1^2+u_3^2)+1 & -a\lambda u_1 + b\lambda^2u_2u_3 \\ -a\lambda u_2 + b\lambda^2u_1u_3 & a\lambda u_1 + b\lambda^2u_2u_3 & -b\lambda^2(u_1^2+u_2^2)+1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-183}$$

Trong đó, λ là hệ số chuẩn hóa spinor, trong khi $a = a(\phi, u)$ và $b = b(\phi, u)$ là các hàm scalar của góc quay và biến không đổi của $\tilde{u}$.

Dựa trên phương trình $u = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} = 1$, Bảng 2-1 tổng hợp một số biểu diễn của rotator R dưới dạng một hàm của các hệ số a, b và spinor $\lambda\tilde{u}$.

Bảng 2-1: Rotator R là hàm của spinor

a	b	λ	R
$sin\phi$	$sin^2\frac{\phi}{2}$	1	$I + sin\phi\tilde{u} + 2sin^2\frac{\phi}{2}\tilde{u}^2$
$2cos^2\frac{\phi}{2}$	$2cos^2\frac{\phi}{2}$	$tan\frac{\phi}{2}$	$I + 2cos^2\frac{\phi}{2}\left[tan\frac{\phi}{2}\tilde{u} + tan^2\frac{\phi}{2}\tilde{u}^2\right]$

			$= \left[I + tan\frac{\phi}{2}\tilde{u}\right]\left[I - tan\frac{\phi}{2}\tilde{u}\right]^{-1}$
$2cos\frac{\phi}{2}$	2	$sin\frac{\phi}{2}$	$I + 2cos\frac{\phi}{2}sin\frac{\phi}{2}\tilde{u}\left[tan\frac{\phi}{2}\tilde{u} + tan^2\frac{\phi}{2}\tilde{u}^2\right]$
$\frac{1}{\phi}sin\phi$	$\frac{2}{\phi^2}sin^2\frac{\phi}{2}$	ϕ	$I + sin\phi\tilde{u} + 2sin^2\frac{\phi}{2}\tilde{u}^2$

Ví dụ 2-36: Giá trị riêng của một spinor.

Xem xét trục quay được xác định bởi

$$u = \begin{bmatrix}6\\2\\3\end{bmatrix}, u = 7 \quad (2\text{-}184)$$

Ma trận spin và bình phương của nó là

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\3 & 0 & -6\\-2 & 6 & 0\end{bmatrix} \quad (2\text{-}185)$$

$$\tilde{u}^2 = \begin{bmatrix}-13 & 12 & 18\\12 & -45 & 6\\18 & 6 & -40\end{bmatrix} \quad (2\text{-}186)$$

Trong đó, giá trị riêng của $\tilde{u}$ là $(0,7i,-7i)$ trong khi các trị riêng của $\tilde{u}^2$ là $(0,-49,-49)$.

2.3.5. Bài tập

1. Trục không đổi của phép quay. Xác định trục quay $\hat{u}$ có cố định trong $B(Oxyz)$ hay $G(OXYZ)$ không.

2. Phân tích trục-góc.

Một khung tọa độ của vật thể B quay một góc 30 độ quanh trục X và sau đó 45 độ quanh trục Z.

a. Xác định ma trận biến đổi quay R_B^G.

b. Xác định góc và trục quay R_B^G.

c. Xác định góc Euler ma trận biến đổi quay R_B^G.

d. Xác định các thông số Euler ma trận biến đổi quay R_B^G.

3. Quay theo trục-góc và góc Euler.

a. Xác định các góc Euler tương ứng với phép quay 45 độ về quanh $u = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

b. Xác định trục và góc quay cho phép quay kết hợp 45 độ quanh trục x, sau đó 45 độ quanh trục y, và cuối cùng 45 độ quanh trục z.

c. Xác định các góc Euler tương ứng với các phép quay trong ý b.

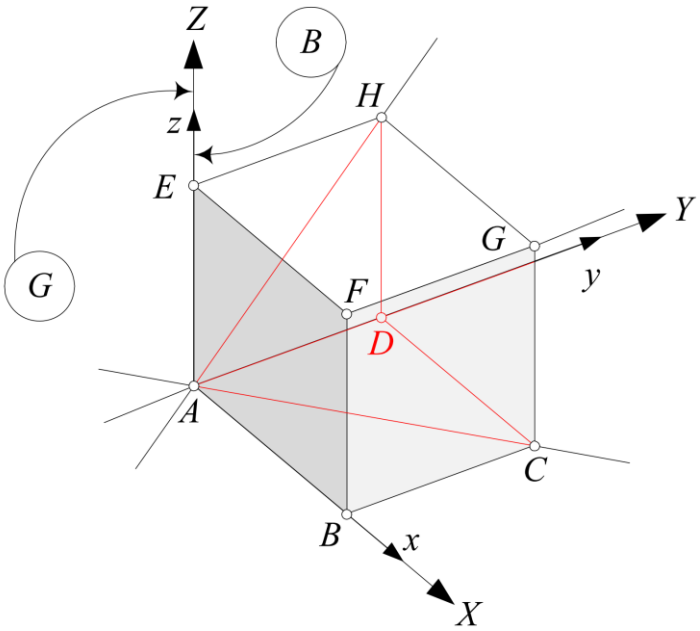
d. Xác định các góc cần quay xung quanh các trục x, sau đó y, rồi z để có cùng hướng cuối cùng như ý a.

4. Góc Euler giữa hai khung tọa độ cục bộ.

Các góc Euler giữa hệ tọa độ B_1 và G là 20 độ, 35 độ và -40 độ. Các góc Euler giữa hệ tọa độ B_2 và G là 60 độ, -30 độ và -10 độ. Tìm góc và trục quay chuyển đổi B_2 thành B_1.

5. Phép quay toàn cục của một hình lập phương.

Hình 2-16 minh họa vị trí ban đầu của một khối lập phương với một điểm cố định tại A và các cạnh có độ dài $l = 1$.



Hình 2-16 Khối lập phương có độ dài cạnh $l = 1$ ở cấu hình ban đầu.

a. Xoay khối 45 độ quanh AC và xác định tọa độ toàn cục của các góc.

b. Xoay khối 45 độ theo trục AH và xác định tọa độ toàn cục của các góc.

c. Xoay khối 45 độ quanh AG và xác định tọa độ toàn cục của các góc.

6. Trục-góc của một chuỗi phép quay.

Khối lập phương trong Hình 2-16 với một điểm cố định tại A có độ dài cạnh là $l = 1$.

a. Xác định góc và trục quay khi chúng ta xoay khối lập phương 45 độ quanh trục x, sau đó là một phép xoay 45 độ quanh trục y.

b. Xác định góc và trục quay khi chúng ta xoay khối lập phương 45 độ xoay quanh trục x, tiếp theo là một xoay 45 độ xoay quanh AH.

2.4. Động học chuyển động

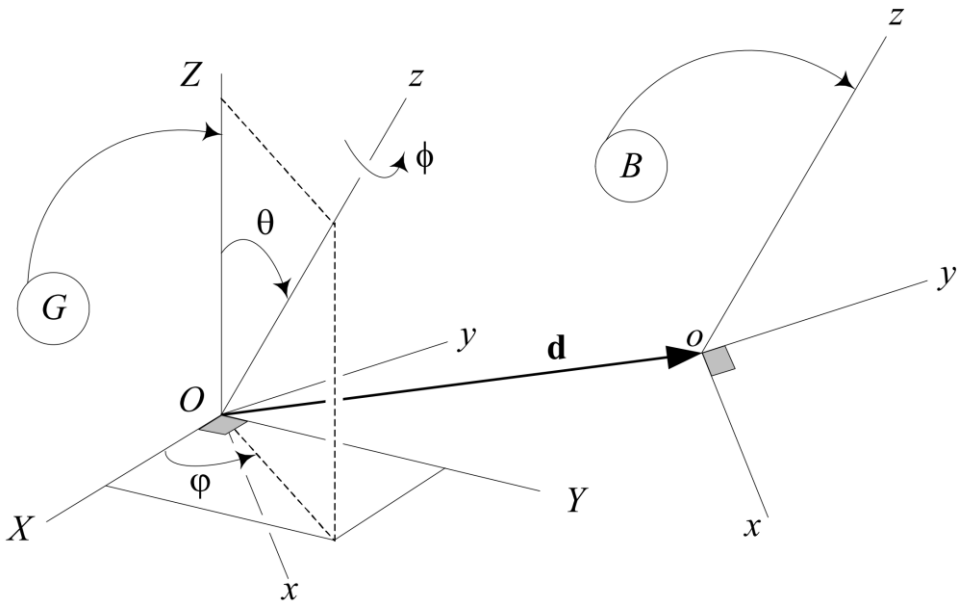
Phép xoay ϕ xoay quanh một trục $\hat{u}$ và một dịch chuyển tịnh tiến d là chuyển động tổng quát của một vật thể rắn B trong một hệ toạ độ toàn cục G. Chuyển động của vật thể rắn có thể được xác định bằng một ma trận 4×4.

2.4.1. Chuyển động của vật thể rắn

Xem xét một vật thể rắn có một hệ tọa độ cục bộ $B(oxyz)$ gắn kèm di chuyển tự do trong một hệ tọa độ toàn cục cố định $G(OXYZ)$. Vật thể rắn có thể quay trong hệ tọa độ toàn cục, trong khi điểm o của khung tọa độ vật thể B có thể dịch chuyển so với gốc O của G như được hiển thị trong Hình 2-17.

Nếu vector d^G xác định vị trí của gốc di chuyển o, so với gốc cố định O, thì tọa độ của một điểm vật thể P trong các khung tọa độ cục bộ và toàn cục có mối quan hệ được mô tả bằng phương trình sau đây:

$$r_P^G = R_B^G r_P^B + d^G \qquad (2\text{-}187)$$



Hình 2-17 Phép quay và dịch chuyển tịnh tiến của một khung tọa độ cục bộ so với một khung tọa độ toàn cục.

Trong đó,

$$r_P^G = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} \qquad r_P^B = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \qquad d^G = \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}188)$$

Vector d^G được gọi là *vector dịch chuyển* hoặc *dịch chuyển tịnh tiến* của B so với G, và R_B^G là ma trận xoay để ánh xạ r^B thành r^G khi $d^G = 0$. Sự kết hợp này giữa một phép quay và một phép dịch chuyển tịnh tiến trong Phương trình (2-187) được gọi là *chuyển động cứng*. Nói cách khác, vị trí của vật thể rắn có thể được mô tả bằng vị trí của gốc o và hướng của khung tọa độ vật thể, so với khung tọa độ toàn cục. Phân tích chuyển động cứng thành một phép quay và một phép dịch chuyển tịnh tiến là phương pháp đơn giản nhất để biểu diễn sự dịch chuyển không gian.

Ví dụ 2-37: Chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của khung tọa độ vật thể.

Khung tọa độ vật thể $B(oxyz)$, ban đầu trùng với khung tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$, xoay 45 độ quanh trục X và dịch chuyển tịnh tiến đến $[3 \quad 5 \quad 7]^T$. Vị trí toàn cục của một điểm tại B là $r^B = [x \quad y \quad z]^T$ là:

$$r^G = R_B^G r^B + d^G$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos45 & -sin45 \\ 0 & sin45 & cos45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}189)$$

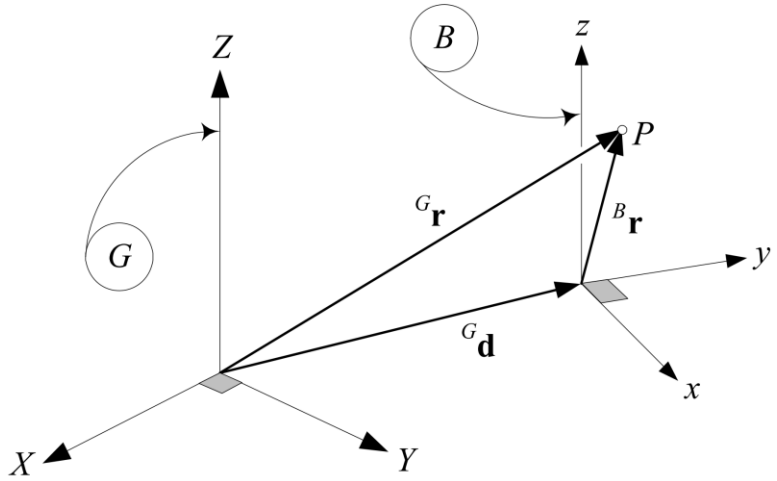
$$= (x+3)\hat{I} + (0.707y - 0.707z + 5)\hat{J} + (0.707y + 0.707z + 7)\hat{K}$$

Ví dụ 2-38: Dịch chuyển khung tọa độ vật thể.

Hình 2-18 thể hiện điểm P tại B có vị trí $r_P^B = 0.1\hat{\imath} + 0.3\hat{\jmath} + 0.3\hat{k}$ trong một khung tọa độ vật thể B, xoay một góc 50 độ quanh trục Z và dịch chuyển -1 theo trục X, 0.5 theo trục Y, và 0.2 theo trục Z.

Vị trí của P trong hệ tọa độ toàn cục là:

$$r^G = R_B^G r_P^B + d^G$$
$$= \begin{bmatrix} cos50 & -sin50 & 0 \\ sin50 & cos50 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.166 \\ 0.769 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}190)$$



Hình 2-18 Chuyển động tịnh tiến và quay của vật thể trong hệ tọa độ toàn cục.

Ví dụ 2-39: Xoay một vật thể rắn đã dịch chuyển tịnh tiến.

Điểm P của một vật thể rắn B có một vector vị trí ban đầu r_P^B.

$$r_P^B = [1 \quad 2 \quad 3]^T \quad (2\text{-}191)$$

Nếu vật thể quay 45 độ quanh trục x, và sau đó di chuyển tới $d^G = [1 \quad 2 \quad 3]^T$, vị trí cuối cùng của P sẽ là

$$r^G = {}^B R_{x,45}^T r_P^B + d^G$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos45 & -sin45 \\ 0 & sin45 & cos45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0 \\ 4.23 \\ 9.53 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}192)$$

Phép xoay được thực hiện dựa trên giả định rằng $d^G = 0$

Ví dụ 2-40: Xoay cánh tay kèm theo phần kéo dài.

Vector vị trí của điểm P_1 ở đầu của một cánh tay như được hiển thị trong Hình 2-19(a) là ở ${}^G\mathbf{r}_{P_1} = {}^B\mathbf{r}_{P_1} = [1350 \quad 0 \quad 900]^T$ mm. Cánh tay xoay 60 độ xung quanh trục Z toàn cục, và kéo dài thêm $\mathbf{d} = 720.2\hat{\imath}$ mm. Cấu hình cuối cùng của cánh tay được hiển thị trong Hình 2-19(b).

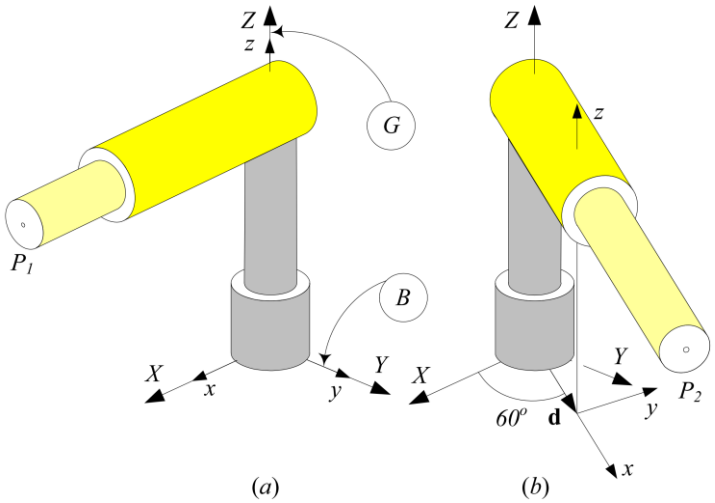
Vector vị trí mới của điểm P là

$$^{G}\mathbf{r}_{P_2} = R_B^G r_{P_1}^B + d^G \tag{2-193}$$

Trong đó, $R_B^G = R_{Z,60}$ được sử dụng để biến đổi $\mathbf{r}_{P_2}$ thành $\mathbf{r}_{P_1}$ khi $d^G = 0$,

$$R_B^G = \begin{bmatrix} cos60 & -sin60 & 0 \\ sin60 & cos60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-194}$$

Và d^G là vector dịch chuyển của o liên quan đến O trong hệ toạ độ toàn cục.



Hình 2-19 Cánh tay RP.

Vector dịch chuyển tịnh tiến trong hệ toạ độ vật thể là $d^B = [720.2 \quad 0 \quad 0]^T$ vì vậy d^G sẽ được xác định bằng một phép biến đổi.

$$d^G = R_B^G d^B$$
$$= \begin{bmatrix} cos60 & -sin60 & 0 \\ sin60 & cos60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720.2 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360.1 \\ 623.7 \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{2-195}$$

Do đó, vị trí toàn cục cuối của điểm tác động cuối của cánh tay là tại

$$^{G}\mathbf{r}_{P_2} = R_B^G r_{P_1}^B + d^G = \begin{bmatrix} c60 & -s60 & 0 \\ s60 & c60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1350 \\ 0 \\ 900 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 360.1 \\ 623.7 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1035.1 \\ 1792.8 \\ 900.0 \end{bmatrix} \tag{2-196}$$

Ví dụ 2-41: Sự kết hợp các phép biến đổi

Giả sử

$$^{2}\boldsymbol{r} = {}^{2}R_1 \, {}^{1}\boldsymbol{r} + {}^{2}\boldsymbol{d}_1 \tag{2-197}$$

Xác định chuyển động cứng của vật thể B_1 với vật thể B_2, và

$$^{G}\boldsymbol{r} = {}^{G}R_2 \, {}^{2}\boldsymbol{r} + {}^{G}\boldsymbol{d}_2 \tag{2-198}$$

Xác định chuyển động cứng của vật thể B_2 so với khung G. Sự kết hợp xác định một chuyển động cứng thứ ba, có thể được mô tả bằng cách thay thế biểu thức cho $^{2}\mathbf{r}$ vào phương trình cho $^{G}\mathbf{r}$.

$$\begin{aligned} {}^{G}\boldsymbol{r} &= {}^{G}R_2({}^{2}R_1\,{}^{1}\boldsymbol{r} + {}^{2}\boldsymbol{d}_1) + {}^{G}\boldsymbol{d}_2 \\ &= {}^{G}R_2\,{}^{2}R_1\,{}^{1}\boldsymbol{r} + {}^{G}R_2\,{}^{2}\boldsymbol{d}_1 + {}^{G}\boldsymbol{d}_2 \\ &= {}^{G}R_1\,{}^{1}\boldsymbol{r} + {}^{G}\boldsymbol{d}_1 \end{aligned} \tag{2-199}$$

Do đó,

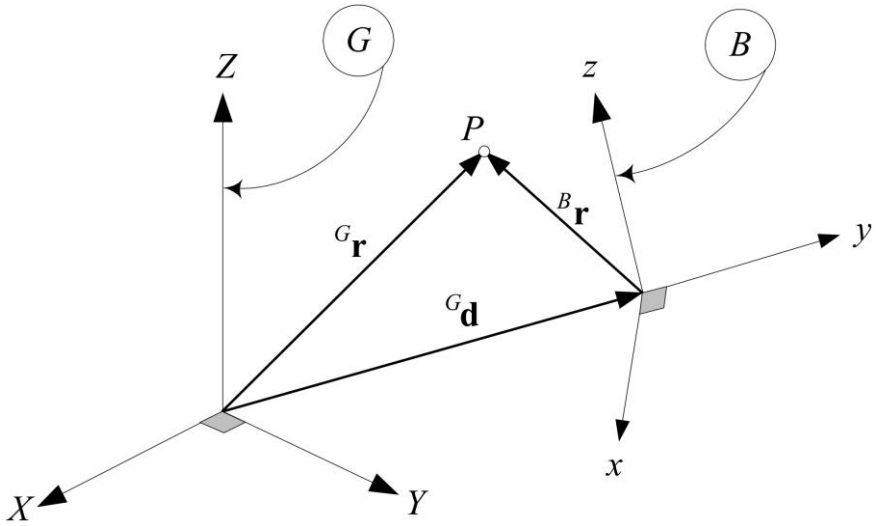
$$\begin{aligned} {}^{G}R_1 &= {}^{G}R_2\,{}^{2}R_1 \\ {}^{G}\boldsymbol{d}_1 &= {}^{G}R_2\,{}^{2}\boldsymbol{d}_1 + {}^{G}\boldsymbol{d}_2 \end{aligned} \tag{2-200}$$

Phương trình này cho thấy rằng việc chuyển đổi từ khung B_1 sang khung G có thể được thực hiện bằng cách quay ${}^{G}R_1$và dịch chuyển ${}^{G}\mathbf{d}_1$.

2.4.2. Biến đổi đồng nhất

Như được thể hiện trong Hình 2-20, một điểm tùy ý P của một vật thể rắn được gắn vào khung tọa độ cục bộ B được ký hiệu là ${}^{B}\mathbf{r}_P$ và ${}^{G}\mathbf{r}_P$ trong các khung tọa độ khác nhau. Vector ${}^{G}\mathbf{d}$ chỉ ra vị trí gốc o của khung tọa độ vật thể trong khung tọa độ toàn cục. Do đó, một chuyển động tổng quát của một vật thể rắn $B(oxyz)$ trong khung toàn cục $G(OXYZ)$ là sự kết hợp của quay ${}^{G}R_B$ và dịch chuyển ${}^{G}\mathbf{d}$.

$${}^{G}\boldsymbol{r} = {}^{G}R_B\,{}^{B}\boldsymbol{r} + {}^{G}\boldsymbol{d} \tag{2-201}$$



Hình 2-20 Biểu diễn của một điểm P trong các hệ trục tọa độ B và G.

Sử dụng ma trận quay cộng với một vector dẫn đến việc sử dụng tọa độ đồng nhất. Ma trận biến đổi đồng nhất mới có kích thước 4×4, ${}^{G}T_B$, thể hiện chuyển động cứng bằng một phép biến đổi ma trận đơn.

$${}^{G}\boldsymbol{r} = {}^{G}T_B\,{}^{B}\boldsymbol{r} \tag{2-202}$$

Trong đó,

$$\begin{aligned} {}^{G}T_B &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X_o \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y_o \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} {}^{G}R_B & & & {}^{G}\boldsymbol{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} {}^{G}R_B & {}^{G}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-203}$$

Và

$$ {}^{G}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^{B}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^{G}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-204} $$

Ma trận biến đổi đồng nhất ${}^{G}T_B$ là một ma trận 4×4, chuyển đổi một vector vị trí đồng nhất từ một khung tham chiếu này sang khung tham chiếu khác. Việc mở rộng biểu diễn ma trận của các phép biến đổi cứng chỉ là để đơn giản hóa tính toán số.

Biểu diễn của một vector vị trí gồm n thành phần bằng một vector có $(n+1)$ thành phần được gọi là biểu diễn tọa độ đồng nhất. Phần tử được thêm vào là một hệ số tỷ lệ, w; do đó, nói chung, biểu diễn đồng nhất của một vector $\boldsymbol{r} = [x \quad y \quad z]^T$ là:

$$ \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ w \end{bmatrix} \tag{2-205} $$

Sử dụng các tọa độ đồng nhất cho thấy rằng giá trị tuyệt đối của bốn tọa độ không quan trọng. Thay vào đó, ba tỷ lệ $r_1/w, r_2/w$ và r_3/w mới quan trọng bởi vì,

$$ \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-206} $$

Cho $w \neq 0$ và $w \neq \infty$. Do đó, vector đồng nhất $w\boldsymbol{r}$ tương ứng với điểm giống như $\boldsymbol{r}$.

Nếu $w = 1$, thì các tọa độ đồng nhất của một vector vị trí sẽ giống như các tọa độ vật lý của vector và không gian sẽ là không gian Euclid tiêu chuẩn.

Ví dụ 2-42: Chuyển động quay và chuyển động tịnh tiến của một hệ tọa độ của vật thể.

Một hệ tọa độ vật thể $B(oxyz)$, ban đầu trùng với hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$, xoay một góc 45 độ quanh trục X và dịch chuyển đến $[3 \quad 5 \quad 7 \quad 1]^T$. Sau đó, biểu diễn ma trận của vị trí toàn cục của một điểm tại ${}^{B}\mathbf{r} = [x \quad y \quad z \quad 1]^T$ là:

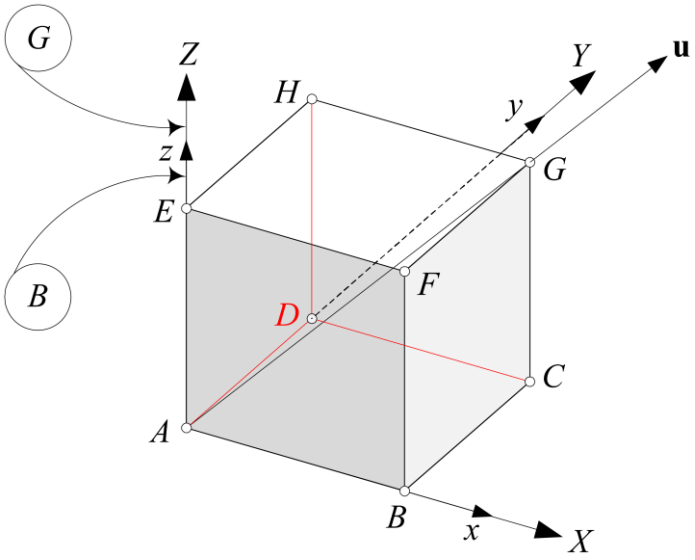
$$ \begin{aligned} {}^{G}r &= {}^{G}T_B \, {}^{B}r \\ &= \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & cos45 & -sin45 & 5 \\ 0 & sin45 & cos45 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-207} $$

Ví dụ 2-43: Phép quay theo trục và phép dịch chuyển tịnh tiến.

Xem xét một vật thể rắn hình lập phương có độ dài cạnh bằng đơn vị tại góc phần tư thứ nhất như được hiển thị trong Hình 2-21.

Nếu ta xoay khối lập phương 45 độ quanh u

$$ u = [1 \quad 1 \quad 1]^T \tag{2-208} $$



Hình 2-21 Vật thể rắn hình lập phương với độ dài cạnh bằng một đơn vị.

Thì,

$$\phi = \frac{\pi}{4} \qquad \hat{u} = \frac{u}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix} \tag{2-209}$$

và ma trận biến đổi Rodriguez của nó là:

$$\begin{aligned} R_{\hat{u},\phi} &= I cos\,\phi + \hat{u}\hat{u}^T vers\,\phi + \tilde{u} sin\,\phi \\ &= \begin{bmatrix} 0.80474 & -0.31062 & 0.50588 \\ 0.50588 & 0.80474 & -0.31062 \\ -0.31062 & 0.50588 & 0.80474 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-210}$$

Di chuyển khối lập phương bởi ${}^{G}\mathrm{d}$

$${}^{G}d = [1 \quad 1 \quad 1]^T \tag{2-211}$$

tạo ra ma trận biến đổi đồng nhất ${}^{G}T_B$ sau đây.

$${}^{G}T_B = \begin{bmatrix} 0.80474 & -0.31062 & 0.50588 & 1 \\ 0.50588 & 0.80474 & -0.31062 & 1 \\ -0.31062 & 0.50588 & 0.80474 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-212}$$

Các tọa độ cục bộ của các góc của mặt trên là:

	${}^{B}\mathbf{r}_E$	${}^{B}\mathbf{r}_F$	${}^{B}\mathbf{r}_G$	${}^{B}\mathbf{r}_H$
x				
y				
z				

Và do đó, sử dụng ${}^{G}\mathbf{r} = {}^{G}T_B\,{}^{B}\mathbf{r}$ là các tọa độ toàn cục của các góc.

Sau khi các chuyển động là:

	${}^G\mathbf{r}_E$	${}^G\mathbf{r}_F$	${}^G\mathbf{r}_G$	${}^G\mathbf{r}_H$
X	1.505	2.310	2	1.196
Y	0.689	1.196	2	1.495
Z	1.804	1.495	2	2.31

Ví dụ 2-44: Phân tích ${}^G T_B$ thành dịch chuyển tịnh tiến và quay.

Ma trận biến đổi đồng nhất ${}^G T_B$ có thể phân tích thành một phép nhân ma trận của một ma trận xoay thuần nhất ${}^G R_B$ và một ma trận dịch chuyển tịnh tiến thuần nhất ${}^G D_B$.

$$\begin{aligned} {}^G T_B &= {}^G D_B \, {}^G R_B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_o \\ 0 & 1 & 0 & Y_o \\ 0 & 0 & 1 & Z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X_o \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y_o \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-213}$$

Nói cách khác, phép biến đổi có thể được thực hiện thông qua một phép xoay thuần túy trước đó, tiếp theo là một phép dịch chuyển tịnh tiến thuần túy. Lưu ý rằng việc phân tích phép biến đổi dịch chuyển tịnh tiến và xoay không thể hoán đổi được.

$$\begin{aligned} {}^G T_B &= {}^G D_B \, {}^G R_B \\ &\neq {}^G R_B \, {}^G D_B \end{aligned} \tag{2-214}$$

Tuy nhiên, theo định nghĩa của ${}^G R_B$ và ${}^G D_B$,

$$\begin{aligned} {}^G T_B &= {}^G D_B \, {}^G R_B \\ &= {}^G D_B + {}^G R_B - \boldsymbol{I} \\ &= {}^G R_B + {}^G D_B - \boldsymbol{I}. \end{aligned} \tag{2-215}$$

Ví dụ 2-45: Dịch chuyển tịnh tiến thuần túy.

Một vật thể rắn với hệ tọa độ của nó là $B(oxyz)$, ban đầu trùng với hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$, dịch chuyển đến

$${}^G \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_X \\ d_Y \\ d_Z \end{bmatrix} \tag{2-216}$$

Chuyển động của vật thể rắn là sự dịch chuyển tịnh tiến thuần túy và ma trận biến đổi cho một điểm trên vật thể rắn trong khung tọa độ tham chiếu toàn cục là

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\boldsymbol{r} &= {}^{G}T_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{r} = {}^{G}D_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{r} \\
&= \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_X \\ 0 & 1 & 0 & d_Y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2-217}
$$

Ví dụ 2-46: Biến đổi đồng nhất để quay quanh các trục tọa độ toàn cục.

Sử dụng biểu diễn đồng nhất của phép quay quanh các trục của hệ tọa độ toàn cục, quay α quanh trục Z là

$$
G_B = A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 1 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-218}
$$

Ví dụ 2-47: Quay quanh và dịch chuyển tịnh tiến dọc theo một trục tọa độ toàn cục.

Điểm P được đặt tại tọa độ $(0, 0, 200)$ trong hệ tọa độ vật thể. Nếu vật thể rắn quay 30 độ quanh trục X toàn cục và gốc của khung tọa độ vật thể dịch chuyển đến $(X, Y, Z) = (500{,}0{,}600)$, thì tọa độ của điểm trong hệ tọa độ toàn cục là:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sin30 & -sin30 & 0 \\ 0 & sin30 & cos30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ -100 \\ 773.2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-219}
$$

Ví dụ 2-48: Quay quanh và dịch chuyển tịnh tiến dọc theo một trục tọa độ cục bộ.

Một điểm P được đặt tại tọa độ $(0, 0, 200)$ trong một hệ tọa độ vật thể. Nếu gốc của hệ tọa độ vật thể dịch chuyển đến $(X, Y, Z) = (500{,}0{,}600)$ và quay 30 độ xoay quanh trục x cục bộ, thì các tọa độ của điểm trong hệ tọa độ toàn cục là:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos30 & sin30 & 0 \\ 0 & -sin30 & cos30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ -100 \\ 773.2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-220}
$$

Ví dụ 2-49: Chuyển động tịnh tiến

Nếu một điểm trên vật thể

$$
{}^{B}\boldsymbol{r} = [-1 \quad 0 \quad 2 \quad 1]^{T} \tag{2-221}
$$

Tịnh tiến đến

$$
{}^{G}\boldsymbol{r} = [0 \quad 10 \quad -5 \quad 1]^{T} \tag{2-222}
$$

Khi đó, phép biến đổi tương ứng có thể được xác định bằng cách

$$
\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_X \\ 0 & 1 & 0 & d_Y \\ 0 & 0 & 1 & d_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-223}
$$

Do đó,

$$1 + d_X = 2 \qquad 4 + d_Y = 10 \qquad 2 + d_Z = -5 \qquad (2\text{-}224)$$

Và

$$d_X = 1 \qquad d_Y = 6 \qquad d_Z = -7 \qquad (2\text{-}225)$$

Ví dụ 2-50: Chuyển động tịnh tiến thuần túy và quay thuần túy

Các phép biến đổi đồng nhất cơ bản cho việc dịch chuyển tịnh tiến dọc theo và quay quanh các trục X, Y và Z được mô tả dưới đây.

$$^{G}T_B = D_{X,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}226)$$

$$^{G}T_B = R_{X,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\gamma & -sin\gamma & 0 \\ 0 & sin\gamma & cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}227)$$

$$^{G}T_B = D_{Y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}228)$$

$$^{G}T_B = R_{Y,\beta} = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}229)$$

$$^{G}T_B = D_{Z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}230)$$

$$^{G}T_B = R_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}231)$$

Ví dụ 2-51: Biến đổi đồng nhất như là một phép cộng vector.

Như được thể hiện trong Hình 2-20, vị trí của điểm P có thể được mô tả bằng cách cộng vector.

$$^{G}\boldsymbol{r}_P = {}^{G}\boldsymbol{d} + {}^{B}\boldsymbol{r}_P \qquad (2\text{-}232)$$

Vì phương trình vector chỉ có ý nghĩa khi tất cả các vector được mô tả trong cùng một hệ tọa độ, chúng ta cần chuyển đổi hoặc $^{B}\mathbf{r}_P$ thành G hoặc $^{G}\mathbf{d}$ thành B. Do đó, phương trình vector áp dụng là

$$^{G}\boldsymbol{r}_P = {}^{G}R_B\,{}^{B}\boldsymbol{r}_P + {}^{G}\boldsymbol{d} \qquad (2\text{-}233)$$

Hoặc

$$ {}^{B}R_{G}\,{}^{G}\boldsymbol{r}_{P} = {}^{B}R_{G}\,{}^{G}\boldsymbol{d} + {}^{B}\boldsymbol{r}_{P} \tag{2-234} $$

Ta xác định biến đổi đồng nhất từ B sang G.

$$ {}^{G}\boldsymbol{r}_{P} = {}^{G}T_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{r}_{P} \tag{2-235} $$

$$ {}^{G}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B} & {}^{G}\mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-236} $$

Và xác định phép biến đổi từ G thành B.

$$ {}^{B}\boldsymbol{r}_{P} = {}^{B}T_{G}\,{}^{G}\boldsymbol{r}_{P} \tag{2-237} $$

$$ \begin{aligned} {}^{B}T_{G} &= \begin{bmatrix} {}^{B}R_{G} & -{}^{B}R_{G}\,{}^{G}\mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B}^{T} & -{}^{G}R_{B}^{T}\,{}^{G}\mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-238} $$

Ví dụ 2-52: Điểm vô cùng.

Những điểm vô cùng biểu diễn các tọa độ đồng nhất. Xem xét hệ số tỉ lệ w là tọa độ thứ tư của một điểm, do đó biểu diễn đồng nhất của điểm được cho bởi

$$ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-239} $$

Khi w tiến gần đến không, điểm sẽ tiến về vô cùng, và chúng ta có thể điều chỉnh quy ước tọa độ đồng nhất

$$ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-240} $$

Mô tả cho một điểm ở vô cùng. Một điểm ở vô cùng chỉ ra một hướng. Trong trường hợp này, nó chỉ ra tất cả các đường song song với vector $\mathrm{r} = [x \quad y \quad z]^{T}$, mà giao nhau tại một điểm ở vô cùng.

Phép biến đổi tọa độ đồng nhất của các điểm vô cùng tạo ra ma trận biến đổi đồng nhất.

$$ {}^{G}T_{B} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X_o \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y_o \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-241} $$

Ba cột đầu tiên có giá trị không ở tọa độ thứ tư. Do đó, chúng đại diện cho các điểm ở vô cùng, là các hướng tương ứng với ba trục tọa độ. Cột thứ tư có giá trị ở tọa độ thứ tư và đại diện cho vị trí gốc hệ tọa độ.

Ví dụ 2-53: Phép biến đổi đồng nhất tổng quát.

Phép biến đổi đồng nhất Phương trình (2-203) là một trường hợp đặc biệt của phép biến đổi đồng nhất tổng quát. Phép biến đổi đồng nhất tổng quát, đã được sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực đồ họa máy tính, có dạng

$$
\begin{aligned}
{}^{A}T_{B} &= \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B}(3\times 3) & {}^{A}\boldsymbol{d}(3\times 1) \\ p(1\times 3) & w(1\times 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \text{Quay} & \text{Tịnh tiến} \\ \text{Góc nhìn} & \text{Hệ số tỉ lệ} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2-242}
$$

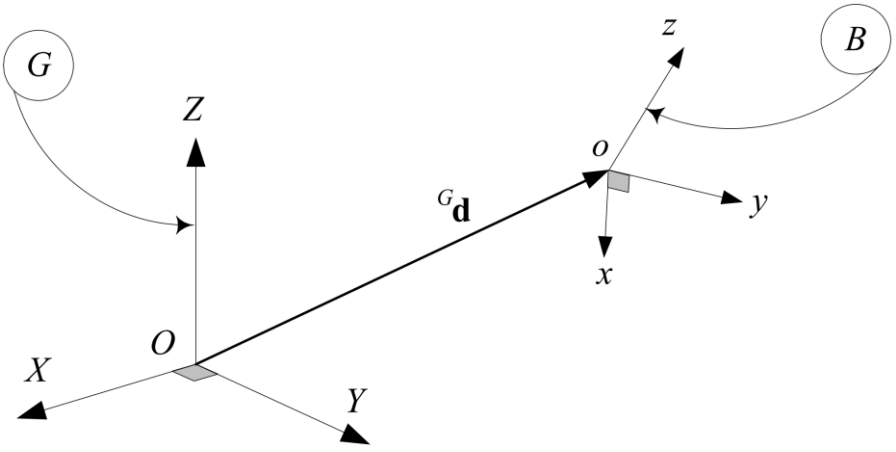
Cho mục đích của robotics, chúng ta luôn lấy vector hàng cuối cùng của $[T]$ là $(0, 0, 0, 1)$. Tuy nhiên, dạng tổng quát hơn của phương trình (2-242) rất hữu ích, ví dụ, khi mô phỏng đồ họa hoặc hệ thống thị giác được thêm vào hệ thống robotics tổng thể.

Ma trận con 3 × 3 phía trên bên trái ${}^{A}R_{B}$ biểu thị sự định hướng của một khung tọa độ di chuyển B so với một khung tọa độ tham chiếu A. Ma trận con 3 × 1 phía trên bên phải ${}^{A}\mathbf{d}$ biểu thị vị trí gốc của khung tọa độ di chuyển B so với khung tọa độ tham chiếu A. Ma trận con 1 × 3 phía dưới p biểu thị một phép biến đổi phối cảnh, và phần tử phía dưới bên phải w là một hệ số tỷ lệ.

2.4.3. Biến đổi đồng nhất nghịch

Ma trận biến đổi đồng nhất mất tính chất trực giao. Nếu chúng ta thể hiện ${}^{G}T_{B}$ bằng

$$
{}^{G}T_{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & {}^{G}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B} & {}^{G}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-243}
$$



Hình 2-22 Minh họa về khung tọa độ vật thể $B(oxyz)$ đã được xoay và dịch chuyển so với khung tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$.

Thì

$$
\begin{aligned}
{}^{B}T_{G} &= {}^{G}T_{B}^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B} & {}^{G}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B}^{T} & -{}^{G}R_{B}^{T}\,{}^{G}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-244}
$$

chứng tỏ rằng

$$ {}^{G}T_{B}^{-1}{}^{G}T_{B} = \boldsymbol{I}_4 \tag{2-245} $$

Tuy nhiên, ma trận biến đổi không phải là ma trận trực giao và nghịch đảo của nó không bằng chuyển vị của nó.

$$ {}^{G}T_{B}^{-1} \neq {}^{G}T_{B}^{T} \tag{2-246} $$

Ví dụ 2-54: Nghịch đảo của ma trận biến đổi đồng nhất.

Giả sử rằng

$$ {}^{G}T_{B} = \begin{bmatrix} 0.643 & -0.766 & 0 & -1 \\ 0.766 & 0.643 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B} & {}^{G}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-247} $$

Thì

$$ {}^{G}R_{B} = \begin{bmatrix} 0.643 & -0.766 & 0 \\ 0.766 & 0.643 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-248} $$

$$ {}^{G}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} \tag{2-249} $$

Và do đó,

$$ \begin{aligned} {}^{B}T_{G} &= {}^{G}T_{B}^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{G}R_{B}^{T} & -{}^{G}R_{B}^{T}{}^{G}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.643 & 0.766 & 0 & 0.26 \\ -0.766 & 0.643 & 0 & -1.087 \\ 0 & 0 & 1 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-250} $$

Ví dụ 2-55: Ma trận biến đổi và tọa độ của các điểm.

Khi mô tả một chuyển động của vật thể rắn thông qua dịch chuyển đã biết của các điểm cụ thể được cố định trên vật thể. Giả sử A, B, C và D là bốn điểm với các tọa độ sau đây ở hai vị trí khác nhau:

$$ A_1(2,4,1) \quad B_1(2,6,1) \quad C_1(1,5,1) \quad D_1(3,5,2) \tag{2-251} $$

$$ A_2(5,1,1) \quad B_2(7,1,1) \quad C_2(6,2,1) \quad D_2(6,2,3) \tag{2-252} $$

Cần phải có ma trận biến đổi T để ánh xạ các vị trí ban đầu thành vị trí cuối,

$$ [T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-253} $$

Và do đó,

$$
\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 & 7/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-254}
$$

Ví dụ 2-56: Biến đổi nghịch đảo nhanh.

Đối với tính toán số, việc phân tích ma trận biến đổi thành phép dịch chuyển tịnh tiến nhân với phép xoay là phương pháp thực tế, và nhân ma trận nghịch đảo. Xem xét một ma trận biến đổi

$$
\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [D][R] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_{14} \\ 0 & 1 & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-255}
$$

Do đó,

$$
\begin{aligned}
T^{-1} &= [DR]^{-1} = R^{-1}D^{-1} = R^T D^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_{14} \\ 0 & 1 & 0 & -r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & -r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -r_{11}r_{14} - r_{21}r_{24} - r_{31}r_{34} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -r_{12}r_{14} - r_{22}r_{24} - r_{32}r_{34} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -r_{13}r_{14} - r_{23}r_{24} - r_{33}r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-256}
$$

Ví dụ 2-57: Nghịch đảo của phép biến đổi đồng nhất tổng quát.

Cho $[T]$ được xác định là một ma trận tổng quát được kết hợp từ bốn ma trận con $[A]$, $[B]$, $[C]$, và $[D]$.

$$
[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{2-257}
$$

Nghịch đảo được cho bởi

$$
T^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{bmatrix} \tag{2-258}
$$

Trong đó,

$$
[E] = D - CA^{-1}B \tag{2-259}
$$

Trong trường hợp biến đổi đồng nhất tổng quát nhất,

$$
\begin{aligned}
{}^{A}T_{B} &= \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B}(3\times 3) & {}^{A}\boldsymbol{d}(3\times 1) \\ p(1\times 3) & w(1\times 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \text{Quay} & \text{Tịnh tiến} \\ \text{Góc nhìn} & \text{Hệ số tỉ lệ} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-260}
$$

Ta có

$$[T] = {}^{A}T_{B} \tag{2-261}$$

$$[A] = {}^{A}R_{B} \tag{2-262}$$

$$[B] = {}^{A}\boldsymbol{d} \tag{2-263}$$

$$[C] = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] \tag{2-264}$$

$$[D] = [w_{1\times 1}] = w \tag{2-265}$$

Và do đó,

$$
\begin{aligned}
&[E] = [E_{1\times 1}] = E \\
&= w - [p_1 \quad p_2 \quad p_3]{}^{A}R_{B}^{-1}\,{}^{A}\boldsymbol{d} \\
&= w - [p_1 \quad p_2 \quad p_3]{}^{A}R_{B}^{T}\,{}^{A}\boldsymbol{d} \\
&= 1 - p_1(d_1r_{11} + d_2r_{21} + d_3r_{31}) \\
&+p_2(d_1r_{12} + d_2r_{22} + d_3r_{32}) \\
&+p_3(d_1r_{13} + d_2r_{23} + d_3r_{33})
\end{aligned} \tag{2-266}
$$

$$
\begin{aligned}
-E^{-1}CA^{-1} &= \frac{1}{E}[g_1 \quad g_2 \quad g_3] \\
g_1 &= p_1r_{11} + p_2r_{12} + p_3r_{13} \\
g_2 &= p_1r_{21} + p_2r_{22} + p_3r_{23} \\
g_3 &= p_1r_{31} + p_2r_{32} + p_3r_{33}
\end{aligned} \tag{2-267}
$$

$$-A^{-1}BE^{-1} = -\frac{1}{E}\begin{bmatrix} d_1r_{11} + d_2r_{21} + d_3r_{31} \\ d_1r_{12} + d_2r_{22} + d_3r_{32} \\ d_1r_{13} + d_2r_{23} + d_3r_{33} \end{bmatrix} \tag{2-268}$$

$$
\begin{aligned}
A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} &= [F] \\
&= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-269}
$$

Trong đó

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= r_{11} + \frac{1}{E}(p_1 r_{11} + p_2 r_{12} + p_3 r_{13})(d_1 r_{11} + d_2 r_{21} + d_3 r_{31}) \\
f_{12} &= r_{21} + \frac{1}{E}(p_1 r_{21} + p_2 r_{22} + p_3 r_{23})(d_1 r_{11} + d_1 r_{21} + d_1 r_{31}) \\
f_{13} &= r_{31} + \frac{1}{E}(p_1 r_{31} + p_2 r_{32} + p_3 r_{33})(d_1 r_{11} + d_2 r_{21} + d_3 r_{31}) \\
f_{21} &= r_{12} + \frac{1}{E}(p_1 r_{11} + p_2 r_{12} + p_3 r_{13})(d_1 r_{12} + d_2 r_{22} + d_3 r_{32}) \\
f_{22} &= r_{22} + \frac{1}{E}(p_1 r_{21} + p_2 r_{22} + p_3 r_{23})(d_1 r_{12} + d_2 r_{22} + d_3 r_{32}) \\
f_{23} &= r_{32} + \frac{1}{E}(p_1 r_{31} + p_2 r_{32} + p_3 r_{33})(d_1 r_{12} + d_2 r_{22} + d_3 r_{32}) \\
f_{31} &= r_{13} + \frac{1}{E}(p_1 r_{11} + p_2 r_{12} + p_3 r_{13})(d_1 r_{13} + d_2 r_{23} + d_3 r_{33}) \\
f_{32} &= r_{23} + \frac{1}{E}(p_1 r_{21} + p_2 r_{22} + p_3 r_{23})(d_1 r_{13} + d_2 r_{23} + d_3 r_{33}) \\
f_{33} &= r_{33} + \frac{1}{E}(p_1 r_{31} + p_2 r_{32} + p_3 r_{33})(d_1 r_{13} + d_2 r_{23} + d_3 r_{33})
\end{aligned}
\tag{2-270}
$$

Trong trường hợp của một phép biến đổi đồng nhất tọa độ

$$[T] = {}^{A}T_{B} \tag{2-271}$$

$$[A] = {}^{A}R_{B} \tag{2-272}$$

$$[B] = {}^{A}\boldsymbol{d} \tag{2-273}$$

$$[C] = [0 \quad 0 \quad 0] \tag{2-274}$$

$$[D] = [1] \tag{2-275}$$

Ta có

$$[E] = [1] \tag{2-276}$$

Và do đó,

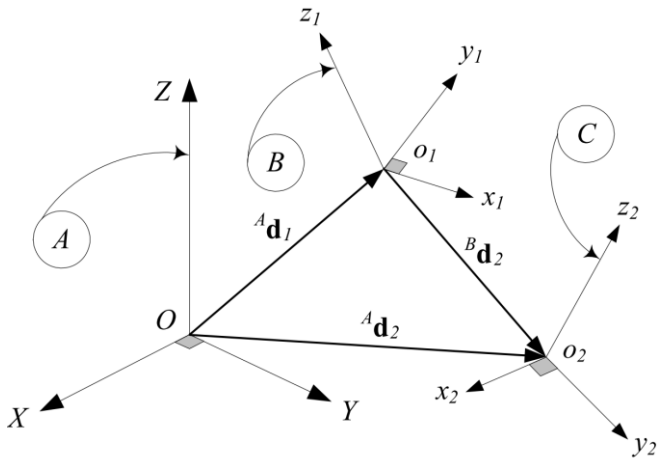
$${}^{A}T_{B}^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B}^{T} & -{}^{A}R_{B}^{T}\,{}^{A}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-277}$$

2.4.4. Biến đổi đồng nhất hợp thành

Hình 2-23 hiển thị ba hệ tham chiếu: A, B và C. Ma trận biến đổi để chuyển đổi tọa độ từ khung tọa độ B sang A và từ khung C sang B là:

$${}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & {}^{A}\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-278}$$

$${}^{B}T_{C} = \begin{bmatrix} {}^{B}R_{C} & {}^{B}\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-279}$$



Hình 2-23 Ba hệ tọa độ để phân tích các biến đổi kết hợp.

Vì vậy, ma trận biến đổi từ C sang A là

$$\begin{aligned} {}^A T_C &= {}^A T_B \, {}^B T_C = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B R_C & {}^B\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^A R_B \, {}^B R_C & {}^A R_B \, {}^B\boldsymbol{d}_2 + {}^A\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^A R_C & {}^A\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-280}$$

Và do đó, phép biến đổi nghịch đảo là

$$\begin{aligned} {}^C T_A &= \begin{bmatrix} {}^B R_C^T \, {}^A R_B^T & -{}^B R_C^T \, {}^A R_B^T & [{}^A R_B \, {}^B\boldsymbol{d}_2 + {}^A\boldsymbol{d}_1] \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^B R_C^T \, {}^A R_B^T & -{}^B R_C^T \, {}^B\boldsymbol{d}_2 - {}^A R_C^T \, {}^A\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^A R_C^T & -{}^A R_C^T \, {}^A\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-281}$$

Giá trị của các tọa độ đồng nhất được đánh giá cao hơn khi có nhiều sự dịch chuyển xảy ra liên tiếp, có thể được viết là

$${}^G T_4 = {}^G T_1 \, {}^1 T_2 \, {}^2 T_3 \, {}^3 T_4 \tag{2-282}$$

thay vì

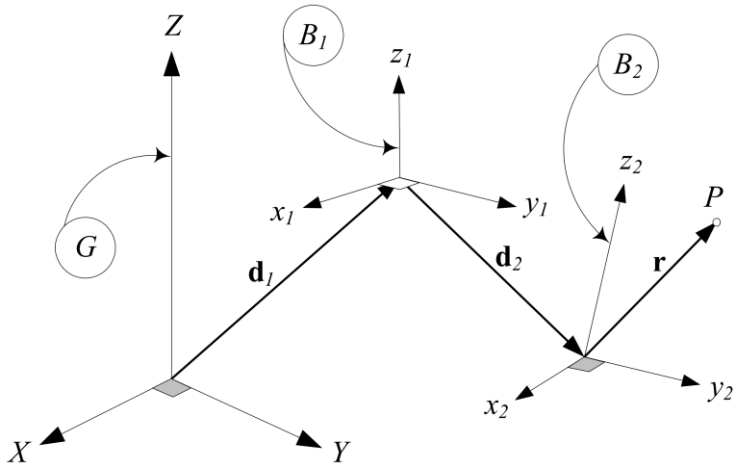
$$\begin{aligned} &{}^G R_4 \, {}^4\boldsymbol{r}_P + {}^G\boldsymbol{d}_4 = \\ &{}^G R_1 ({}^1 R_2 ({}^2 R_3 ({}^3 R_4 \, {}^4\boldsymbol{r}_P + {}^3\boldsymbol{d}_4) + {}^2\boldsymbol{d}_3) + {}^1\boldsymbol{d}_2) + {}^G\boldsymbol{d}_1 \end{aligned} \tag{2-283}$$

Ví dụ 2-58: Biến đổi đồng nhất cho nhiều khung tọa độ.

Hình 2-24 mô tả một điểm P trong một hệ tọa độ cục bộ $B_2(x_2 y_2 z_2)$. Tọa độ của P trong hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$ có thể được xác định bằng cách sử dụng ma trận biến đổi đồng nhất.

Vị trí của điểm P trong hệ tọa độ $B_2(x_2 y_2 z_2)$ được chỉ định bởi ${}^2\mathbf{r}_P$. Do đó, vị trí của nó trong hệ tọa độ $B_1(x_1 y_1 z_1)$ là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1 R_2 & {}^1\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-284}$$



Hình 2-24 Điểm P trong hệ tọa độ cục bộ $B_2(x_2y_2z_2)$.

Và do đó, vị trí của nó trong hệ toạ độ toàn cục $G(OXYZ)$ sẽ là

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{G}R_1 & {}^{G}\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

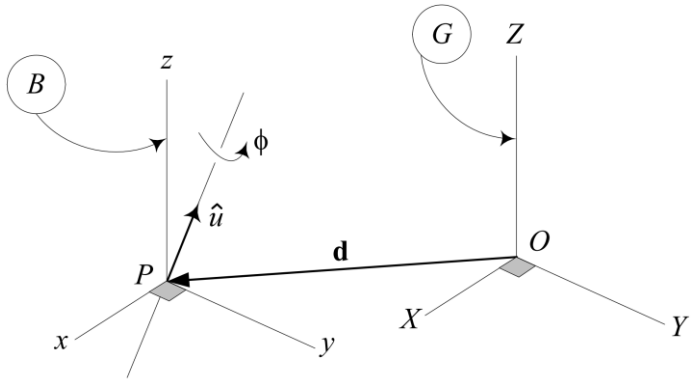
$$= \begin{bmatrix} {}^{G}R_1 & {}^{G}\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{1}R_2 & {}^{1}\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}285)$$

$$= \begin{bmatrix} {}^{G}R_1\,{}^{1}R_2 & {}^{G}R_1\,{}^{1}\boldsymbol{d}_2 + {}^{G}\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2-59: Xoay quanh một trục không đi qua gốc tọa độ.

Ma trận biến đổi đồng nhất có thể biểu diễn các phép quay quanh một trục đi qua một điểm khác với gốc tọa độ. Hình 2-25 chỉ ra một góc quay, ϕ, quanh trục $\hat{u}$, đi qua một điểm P khác với gốc tọa độ.

Ta thiết lập một hệ tọa độ cục bộ B tại điểm P song song với hệ tọa độ toàn cục G. Sau đó, một phép quay quanh vector $\hat{u}$ có thể được biểu diễn như một phép dịch chuyển tịnh tiến theo hướng ngược lại với $-d$, để đưa khung vật thể B đến hệ tọa độ toàn cục G, tiếp theo là một phép quay quanh vector $\hat{u}$.



Hình 2-25 Xoay quanh một trục không đi qua gốc tọa độ.

Phép dịch chuyển tịnh tiến ngược theo chiều d

$$\begin{aligned} {}^{G}T_{B} &= D_{\hat{a},d}R_{\hat{u},\phi}D_{\hat{a},-d} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{\hat{u},\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{\hat{u},\phi} & \boldsymbol{d} - R_{\hat{u},\phi}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-286}$$

Trong đó,

$$R_{\hat{u},\phi} = \begin{bmatrix} u_1^2 \text{ vers } \phi + c\phi & u_1u_2 \text{ vers } \phi - u_3 s\phi & u_1u_3 \text{ vers } \phi + u_2 s\phi \\ u_1u_2 \text{ vers } \phi + u_3 s\phi & u_2^2 \text{ vers } \phi + c\phi & u_2u_3 \text{ vers } \phi - u_1 s\phi \\ u_1u_3 \text{ vers } \phi - u_2 s\phi & u_2u_3 \text{ vers } \phi + u_1 s\phi & u_3^2 \text{ vers } \phi + c\phi \end{bmatrix} \tag{2-287}$$

Và

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{d} - R_{\hat{u},\phi}\boldsymbol{d} = \\ &\begin{bmatrix} d_1(1-u_1^2) \text{ vers } \phi - u_1 \text{ vers } \phi(d_2u_2 + d_3u_3) + s\phi(d_2u_3 - d_3u_2) \\ d_2(1-u_2^2) \text{ vers } \phi - u_2 \text{ vers } \phi(d_3u_3 + d_1u_1) + s\phi(d_3u_1 - d_1u_3) \\ d_3(1-u_3^2) \text{ vers } \phi - u_3 \text{ vers } \phi(d_1u_1 + d_2u_2) + s\phi(d_1u_2 - d_2u_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-288}$$

Ví dụ 2-60: Trục xoay.

Một hình trụ có bán kính $R = 2$ và trục $\hat{u}$ của nó nằm ở vị trí d.

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-289}$$

Nếu hình trụ quay 90 độ xoay quanh trục của nó thì mỗi điểm trên viền của hình trụ sẽ di chuyển 90 độ trên một vòng tròn song song với mặt phẳng (x, y).

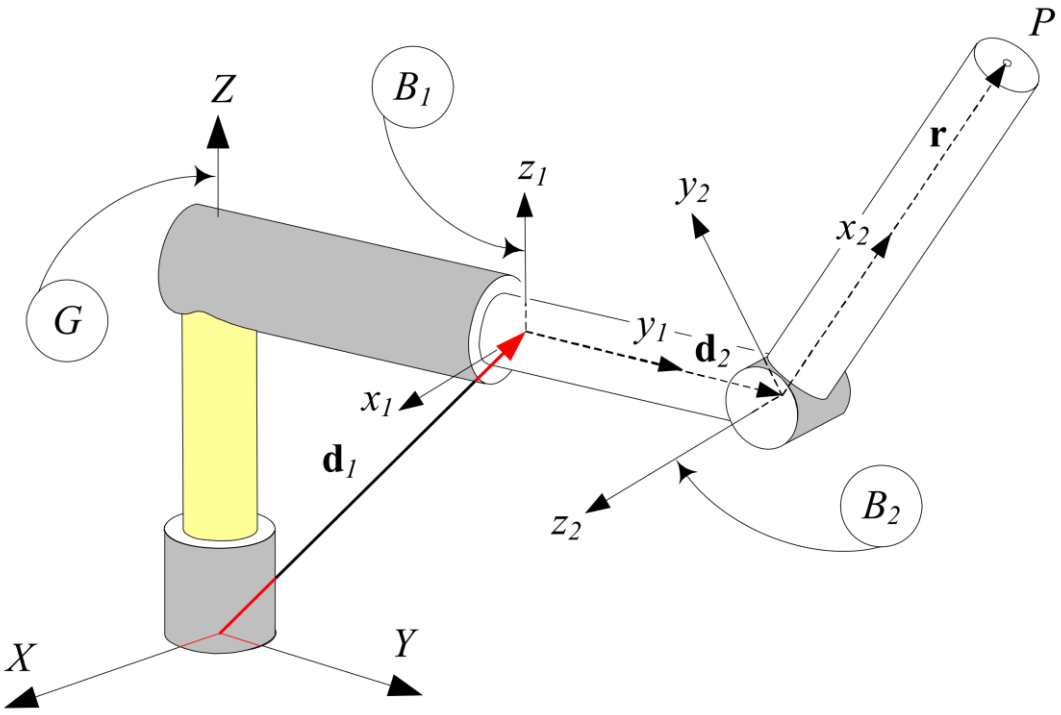
Biến đổi của chuyển động này là:

$$\begin{aligned} {}^{G}T_{B} &= D_{\hat{a},d}R_{\hat{u},\phi}D_{\hat{a},-d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{\hat{K},\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\frac{\pi}{2} & -s\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ s\frac{\pi}{2} & c\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-290}$$

Một điểm trên hình trụ đang ở gốc tọa độ. Sau khi quay, điểm đó sẽ được nhìn thấy ở:

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\boldsymbol{r} &= {}^{G}T_{B}\,{}^{G}\boldsymbol{r} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-291}
$$

Ví dụ 2-61: Khâu chấp hành cuối của một cánh tay robot RPR trong hệ tọa độ toàn cục.



Hình 2-26 Cánh tay robot RPR.

Điểm P chỉ ra điểm tác động cuối của cánh tay robot được hiển thị trong Hình 2-26. Vector vị trí của P trong hệ tọa độ $B_2(x_2y_2z_2)$ là ${}^{2}\mathbf{r}_P$. Hệ tọa độ $B_2(x_2y_2z_2)$ có thể quay quanh trục z_2 và trượt dọc theo y_1. Hệ tọa độ $B_1(x_1y_1z_1)$ có thể quay quanh trục Z của hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$ trong khi gốc của nó nằm tại ${}^{G}\mathbf{d}_1$. Vị trí của P trong $G(OXYZ)$ sau đó sẽ là

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\boldsymbol{r} &= {}^{G}R_1\,{}^{1}R_2\,{}^{2}\boldsymbol{r}_P + {}^{G}R_1\,{}^{1}\boldsymbol{d}_2 + {}^{G}\boldsymbol{d}_1 = {}^{G}T_1\,{}^{1}T_2\,{}^{2}\boldsymbol{r}_P \\
&= {}^{G}T_2\,{}^{2}\boldsymbol{r}_P
\end{aligned} \tag{2-292}
$$

Trong đó,

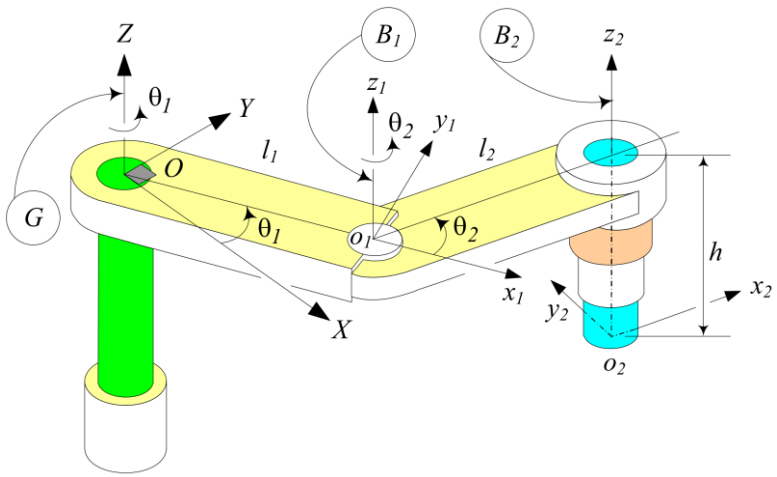
$$
{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} {}^{1}R_2 & {}^{1}\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-293}
$$

$$
{}^{G}T_1 = \begin{bmatrix} {}^{G}R_1 & {}^{G}\mathbf{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-294}
$$

Và

$$
{}^{G}T_2 = \begin{bmatrix} {}^{G}R_1\,{}^{1}R_2 & {}^{G}R_1\,{}^{1}\boldsymbol{d}_2 + {}^{G}\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-295}
$$

Ví dụ 2-62: Khâu chấp hành cuối của một cánh tay robot SCARA trong hệ tọa độ toàn cục.



Hình 2-27 Cánh tay robot SCARA.

Hình 2-27 mô tả một robot $R \parallel R \parallel P$ (SCARA) có hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$ được gắn vào khâu đế cùng với các hệ tọa độ $B_1(x_1y_1z_1)$ và $B_2(x_2y_2z_2)$ gắn với khâu 1 và điểm tác động cuối trên khâu 3.

Ma trận biến đổi, được sử dụng để ánh xạ các điểm trong khung tọa độ B_1 đến khung tọa độ khâu đế G là

$$ {}^{G}T_{B_1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & l_1sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-296} $$

Và ma trận biến đổi được sử dụng để ánh xạ các điểm trong khung tọa độ B_2 sang khung tọa độ B_1 là

$$ {}^{B_1}T_{B_2} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-297} $$

Do đó, ma trận biến đổi để ánh xạ các điểm trong khung tọa độ cơ cấu chấp hành cuối B_2 đến khung cơ sở G là

$$ \begin{aligned} {}^{G}T_{B_2} &= {}^{G}T_{B_1}\,{}^{B_1}T_{B_2} \\ &= \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-298} $$

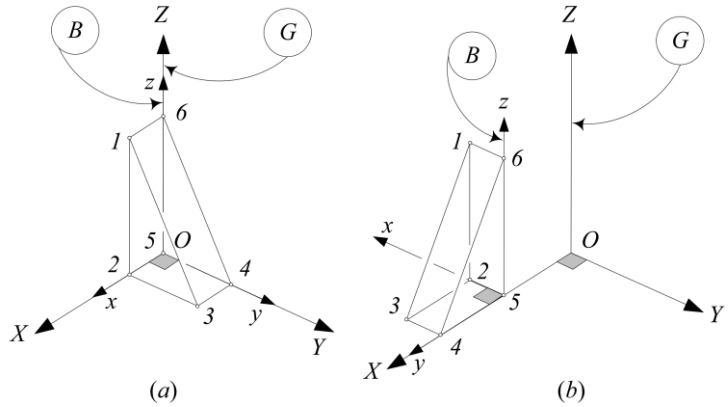
Gốc của khung tọa độ cuối đặt tại ${}^{B_2}\mathbf{r}_{o_2} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$, trong hệ tọa độ cục bộ của nó. Vì vậy, vị trí của o_2 trong hệ tọa độ cơ sở là tại

$$ \begin{aligned} {}^{G}\boldsymbol{r}_2 &= {}^{G}T_{B_2}\,{}^{B_2}\boldsymbol{r}_{o_2} \\ &= \begin{bmatrix} l_1cos\theta_1 + l_2cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_1sin\theta_1 + l_2sin(\theta_1+\theta_2) \\ -h \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2-299} $$

Ví dụ 2-63: Điều khiển vật thể.

Hình học của một vật thể rắn có thể được biểu diễn bằng một mảng (array) chứa các tọa độ đồng nhất của một số điểm cụ thể của vật thể được mô tả trong một hệ tọa độ cục bộ. Những điểm cụ thể thường là các góc.

Hình 2-28(a) minh họa cấu hình của một hình nêm. Các tọa độ của các góc của hình nêm trong hệ thống tọa độ vật thể B của nó được thể hiện trong ma trận P.



Hình 2-28 Mô tả chuyển động của một vật thể rắn dựa trên một số điểm của vật thể.

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-300} $$

Cấu hình của hình nêm sau khi quay -90 độ quanh trục Z và di chuyển ba đơn vị theo trục X được hiển thị trong Hình 2-28(b). Các tọa độ mới các góc của nó trong hệ toạ độ toàn cục G được xác định bằng cách nhân ma trận biến đổi tương ứng với ma trận P.

$$ \begin{aligned} {}^{G}T_{B} &= D_{X,3}R_{Z,90} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos-90 & -sin-90 & 0 & 0 \\ sin-90 & cos-90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-301} $$

Do đó, tọa độ toàn cục của các góc từ 1 đến 6 sau khi di chuyển là

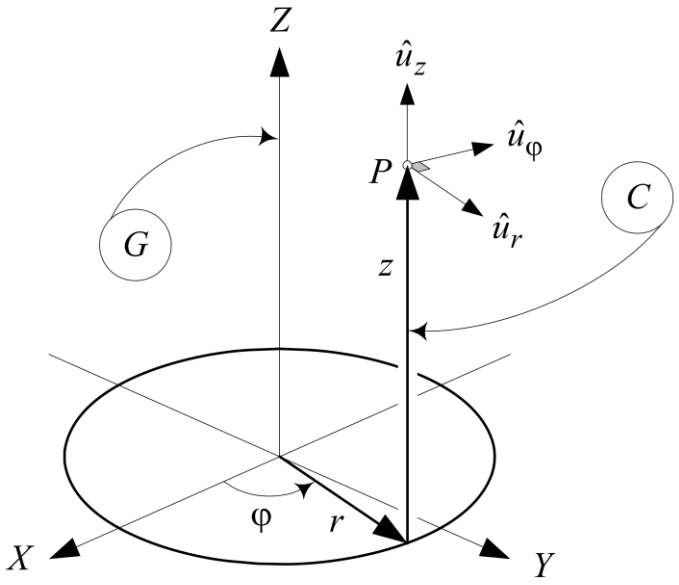
$$ \begin{aligned} {}^{G}P &= {}^{G}T_{B}\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-302} $$

Ví dụ 2-64: Tọa độ trụ.

Ta muốn xác định vị trí của khâu chấp hành cuối của robot dưới dạng tọa độ trụ. Một tập hợp các tọa độ trụ, như được thể hiện trong Hình 2-29, có thể được xác định bằng cách di chuyển r dọc theo trục X, tiếp theo là xoay φ quanh trục Z, và cuối cùng là di chuyển z dọc theo trục Z.

Do đó, ma trận biến đổi đồng nhất để chuyển từ tọa độ trụ trong hệ trục $C(Or\varphi z)$sang tọa độ Descartes trong hệ trục $G(OXYZ)$ là

$$
\begin{aligned}
{}^{G}T_{C} &= D_{Z,z}R_{Z,\varphi}D_{X,r} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 & rcos\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 & rsin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-303}
$$



Hình 2-29 Tọa độ trụ của một điểm P.

Xem xét một điểm P tại $\left(1, \frac{\pi}{3}, 2\right)$ trong hệ tọa độ trụ. Thì, các tọa độ Descartes của P sẽ là:

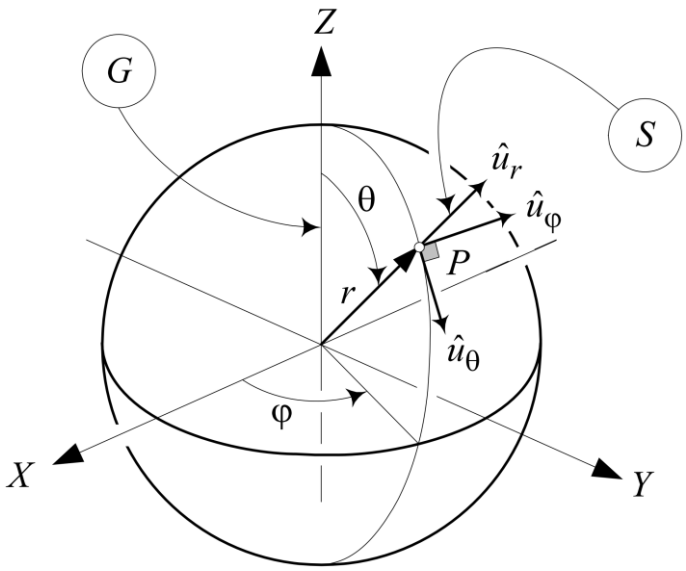
$$
\begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{3} & -sin\frac{\pi}{3} & 0 & cos\frac{\pi}{3} \\ sin\frac{\pi}{3} & cos\frac{\pi}{3} & 0 & sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.866 \\ 2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}
\tag{2-304}
$$

Ví dụ 2-65: Tọa độ cầu.

Tập hợp các tọa độ cầu, như được thể hiện trong Hình 2-30, có thể được xác định bằng cách di chuyển r dọc theo trục Z, tiếp theo là một phép quay θ xoay quanh trục Y, và cuối cùng là một phép quay φ xoay quanh trục Z.

Vì vậy, ma trận biến đổi đồng nhất để chuyển từ tọa độ cầu $S(\mathrm{Or}\,\theta\varphi)$ sang tọa độ Descartes $G(OXYZ)$ là

$$
\begin{aligned}
{}^{G}T_{S} &= R_{Z,\varphi}R_{Y,\theta}D_{Z,r} \\
&= \begin{bmatrix} cos\theta cos\varphi & -sin\varphi & cos\varphi sin\theta & rcos\varphi sin\theta \\ cos\theta sin\varphi & cos\varphi & sin\theta sin\varphi & rsin\theta sin\varphi \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & rcos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-305}
$$



Hình 2-30 Tọa độ cầu của một điểm P.

Trong đó,

$$
R_{Z,\varphi} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-306}
$$

$$
R_{Y,\theta} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-307}
$$

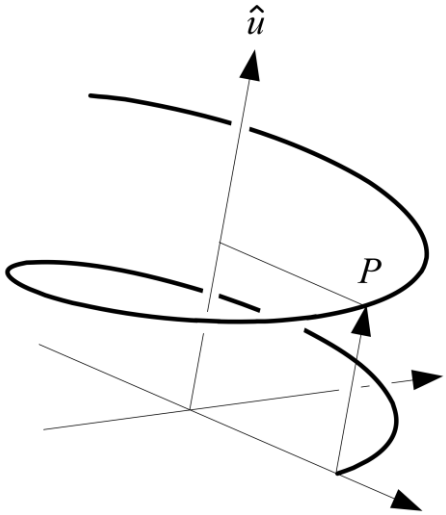
$$
D_{Z,r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-308}
$$

Xem xét một điểm P tại $\left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ trong một hệ tọa độ cầu. Khi đó, các tọa độ Descartes của P sẽ là:

$$
\begin{bmatrix} c\frac{\pi}{3}c\frac{\pi}{3} & -s\frac{\pi}{3} & c\frac{\pi}{3}s\frac{\pi}{3} & 2c\frac{\pi}{3}s\frac{\pi}{3} \\ c\frac{\pi}{3}s\frac{\pi}{3} & c\frac{\pi}{3} & s\frac{\pi}{3}s\frac{\pi}{3} & 2s\frac{\pi}{3}s\frac{\pi}{3} \\ -s\frac{\pi}{3} & 0 & c\frac{\pi}{3} & 2c\frac{\pi}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 1.5 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \tag{2-309}
$$

2.4.5. Tọa độ vít

Bất kỳ chuyển động vật thể rắn nào có thể được tạo ra bằng một phép dịch chuyển theo một trục kết hợp với một phép quay duy nhất xung quanh trục đó. Điều này được gọi là định lý *Chasle*s. Một chuyển động như vậy được gọi là chuyển động vít. Hãy xem xét chuyển động vít được minh họa trong Hình 2-31. Điểm P quay quanh trục vít được xác định bởi $\hat{u}$ và đồng thời dịch chuyển dọc theo cùng một trục đó. Do đó, bất kỳ điểm nào trên trục vít đều di chuyển theo trục, bất kỳ điểm nào nằm ngoài trục đều di chuyển theo một vòng xoắn.



Hình 2-31 Chuyển động vít là sự dịch chuyển dọc theo một đường thẳng kết hợp với một quay quanh đường thẳng đó.

Quay góc của vật thể rắn quanh trục vít được gọi là *đường xoắn (twist). Bước vít (Pitch)* của một trục vít, p, là tỷ lệ giữa sự dịch chuyển tịnh tiến, h, và góc xoắn, ϕ.

$$p = \frac{h}{\phi} \tag{2-310}$$

Nói cách khác, khoảng cách thẳng đối xứng mà vật thể rắn di chuyển song song với trục vít khi quay một đơn vị được gọi là bước vít. Nếu $p > 0$, thì là *vít phải*, và nếu $p < 0$, thì là *vít trái*.

Một vít được biểu diễn bằng hàm $\check{s}(h, \phi, \hat{u}, \mathrm{s})$ và được xác định bởi một vector đơn vị $\hat{u}$, một vector vị trí s, một góc xoắn ϕ, và dịch chuyển h (hoặc bước p). Vector vị trí s xác định vị trí toàn cục của một điểm trên trục vít. Góc xoắn ϕ, trục vít $\hat{u}$, và bước p (hoặc dịch chuyển h) được gọi là các tham số vít.

Biểu diễn ma trận đồng nhất của một biến đổi vít là sự kết hợp giữa quay và dịch chuyển xoay quanh trục vít. Nếu $\hat{u}$ đi qua gốc của hệ tọa độ, thì $s = 0$ và chuyển động vít được gọi là vít trung tâm $\check{s}(h, \phi, \hat{u})$.

Vít là một phương pháp biến đổi khác để mô tả chuyển động của một vật thể rắn. Dịch chuyển tuyến tính $D_{\hat{u},h}$ dọc theo một trục kết hợp với dịch chuyển góc $R_{\hat{u},\phi}$ quanh cùng một trục xuất hiện lặp đi lặp lại trong các ứng dụng robot.

Đối với chuyển động vít trung tâm, chúng ta có:

$$G_{\check{s}_B}(h,\phi,\hat{u}) = D_{\hat{u},h}R_{\hat{u},\phi} \tag{2-311}$$

Trong đó,

$$D_{\hat{u},h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & hu_1 \\ 0 & 1 & 0 & hu_2 \\ 0 & 0 & 1 & hu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-312}$$

$$R_{\hat{u},\phi} = \begin{bmatrix} u_1^2 \operatorname{vers}\phi + c\phi & u_1u_2 \operatorname{vers}\phi - u_3 s\phi & u_1u_3 \operatorname{vers}\phi + u_2 s\phi & 0 \\ u_1u_2 vers\,\phi + u_3 s\phi & u_2^2 vers\,\phi + c\phi & u_2u_3 \operatorname{vers}\phi - u_1 s\phi & 0 \\ u_1u_3 vers\,\phi - u_2 s\phi & u_2u_3 vers\,\phi + u_1 s\phi & u_3^2 vers\,\phi + c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-313}$$

Và do đó,

$$G_{\check{s}_B}(h,\phi,\hat{u}) = \begin{bmatrix} u_1^2 \operatorname{vers}\phi + c\phi & u_1u_2 \operatorname{vers}\phi - u_3 s\phi & u_1u_3 \operatorname{vers}\phi + u_2 s\phi & hu_1 \\ u_1u_2 \operatorname{vers}\phi + u_3 s\phi & u_2^2 vers\,\phi + c\phi & u_2u_3 \operatorname{vers}\phi - u_1 s\phi & hu_2 \\ u_1u_3 \operatorname{vers}\phi - u_2 s\phi & u_2u_3 \operatorname{vers}\phi + u_1 s\phi & u_3^2 vers\,\phi + c\phi & hu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-314}$$

Ma trận biến đổi trục vít trung tâm bao gồm các dịch chuyển và quay cơ bản hoặc thuần túy như các trường hợp đặc biệt vì một dịch chuyển thuần túy tương ứng với $\phi = 0$, và quay thuần túy tương ứng với $h = 0$ (hoặc $p = \infty$). Trục vít trung tâm nghịch được xác định là $\check{s}(-h,-\phi,\hat{u})$.

Đối với một chuyển động vít tổng quát, chúng ta có:

$$\begin{aligned} {}^{G}T_B &= {}^{G}\check{s}_B(h,\phi,\hat{u},\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} {}^{G}R_B & {}^{G}\boldsymbol{s} - {}^{G}R_B\,{}^{G}\boldsymbol{s} + h\hat{u} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^{G}R_B & {}^{G}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-315}$$

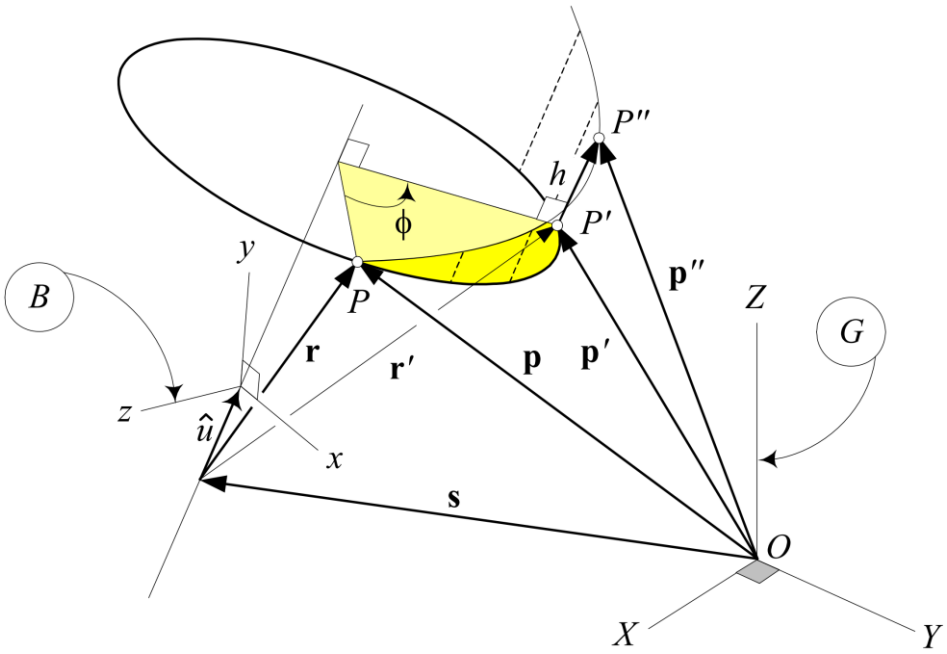
Trong đó,

$${}^{G}R_B = \boldsymbol{I}cos\phi + \hat{u}\hat{u}^T(1 - cos\phi) + \tilde{u}sin\phi \tag{2-316}$$

$${}^{G}\boldsymbol{d} = \left((\boldsymbol{I} - \hat{u}\hat{u}^T)(1 - cos\phi) - \tilde{u}sin\phi\right){}^{G}\boldsymbol{s} + h\hat{u}. \tag{2-317}$$

Khi vít không nằm ở trung tâm và $\hat{u}$ không đi qua gốc tọa độ, chuyển động vít để di chuyển $\mathbf{p}$ đến $\mathbf{p}''$ được ký hiệu là:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'' = {} & (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s})cos\phi + (1 - cos\phi)(\hat{u} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}))\hat{u} \\ & + (\hat{u} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}))sin\phi + \boldsymbol{s} + h\hat{u} \end{aligned} \tag{2-318}$$



Hình 2-32 Chuyển động vít của một vật thể rắn.

Hoặc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'' &= {}^{G}R_{B}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s})+\boldsymbol{s}+h\hat{u} \\ &= {}^{G}R_{B}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{s}-{}^{G}R_{B}\boldsymbol{s}+h\hat{u} \end{aligned} \tag{2-319}$$

Và do đó,

$$\boldsymbol{p}'' = \check{s}(h,\phi,\hat{u},\boldsymbol{s})\boldsymbol{p} = [T]\boldsymbol{p} \tag{2-320}$$

Trong đó $[T]$ là ma trận biến đổi đồng nhất của Phương trình (2-315).

Vector ${}^{G}\mathbf{s}$, được gọi là vector vị trí, là vị trí toàn cục của khung tọa độ vật thể trước chuyển động xoắn. Các vector $\mathbf{p}''$ và $\mathbf{p}$ là các vị trí toàn cục của một điểm P sau và trước chuyển động xoắn, như được hiển thị trong Hình 2-32.

Trục vít được xác định bằng vector đơn vị $\hat{u}$. Một điểm trên vật thể P di chuyển từ vị trí ban đầu của nó đến vị trí thứ hai P' bằng cách quay xung quanh $\hat{u}$. Sau đó, nó di chuyển đến P'' bằng một phép dịch chuyển tịnh tiến h song song với $\hat{u}$. Vị trí ban đầu của P được xác định bởi $\mathbf{p}$ và vị trí cuối cùng của nó được xác định bởi $\mathbf{p}''$.

Trong một số tài liệu tham khảo, vít được định nghĩa như là một đường thẳng có độ nghiêng. Để xác định một chuyển động, cần thêm góc xoắn. Vì vậy, vít là quỹ đạo xoắn ốc của chuyển động, và xoắn là chuyển động thực tế. Tuy nhiên, trong giáo trình này, chúng ta định nghĩa vít là một hàm bốn biến $\check{s}(h,\phi,\hat{u},\mathbf{s})$ để xác định chuyển động. Một vít có một đường hoạt động $\hat{u}$ tại ${}^{G}\mathbf{s}$, độ xoắn ϕ, và dịch chuyển tịnh tiến h.

Ví dụ 2-66: Chuyển đổi vít trung tâm của một vector đơn vị cơ sở.

Xét hai khung tọa độ ban đầu trùng nhau $G(OXYZ)$ và $B(oxyz)$. Vật thể thực hiện một chuyển động vít dọc theo trục Y cho $h = 2$ và $\phi = 90$ độ. Vị trí của một điểm trên vật thể tại $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^{T}$ có thể được xác định bằng cách áp dụng phép biến đổi vít trung tâm.

$$\begin{aligned}\check{s}(h,\phi,\hat{u}) &= \check{s}\left(2,\frac{\pi}{2},\hat{J}\right) = D(2\hat{J})R\left(\hat{J},\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&2\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2\text{-}321)$$

Do đó,

$$\begin{aligned}{}^{G}\hat{\imath} &= \check{s}\left(2,\frac{\pi}{2},\hat{J}\right)^{B}\hat{\imath}\\ &= \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&2\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\\1\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2\text{-}322)$$

Bước của vít này là

$$p = \frac{h}{\phi} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} = 1.2732 \text{ đơn vị}/rad. \quad (2\text{-}323)$$

Ví dụ 2-67: Biến đổi vít của một điểm.

Xét hai khung tọa độ ban đầu song song $G(OXYZ)$ và $B(oxyz)$. Vật thể thực hiện một chuyển động vít dọc theo $X = 2$ và song song với trục Y cho $h = 2$ và $\phi = 90$ độ. Do đó, khung tọa độ của vật thể nằm ở vị trí $\mathbf{s} = [2 \quad 0 \quad 0]^T$. Vị trí của một điểm trên vật thể tại ${}^{B}\mathbf{r} = [3 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$có thể được xác định bằng cách áp dụng phép biến đổi vít, đó là

$$\begin{aligned}{}^{G}T_{B} &= \begin{bmatrix}{}^{G}R_{B} & \boldsymbol{s} - {}^{G}R_{B}\boldsymbol{s} + h\hat{u}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&1&0&2\\-1&0&0&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2\text{-}324)$$

Bởi vì,

$${}^{G}R_{B} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix} \quad (2\text{-}325)$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\ \hat{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad (2\text{-}326)$$

Do đó, vector vị trí của ${}^{G}\mathbf{r}$ sẽ là

$$\begin{aligned}{}^{G}\boldsymbol{r} &= {}^{G}T_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{r}\\ &= \begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&1&0&2\\-1&0&0&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\\1\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2\text{-}327)$$

2.4.6. Bài tập

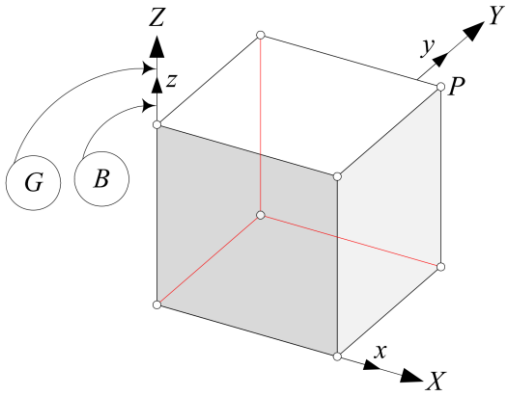
1. Vị trí toàn cục trong chuyển động của một vật thể rắn.

Ta di chuyển hệ tọa độ vật thể B đến ${}^{G}\mathbf{d} = [4 \quad -3 \quad 7]^{T}$

Tìm ${}^{G}\mathbf{r}_{P}$ nếu vị trí cục bộ của một điểm là ${}^{B}\mathbf{r}_{P} = [7 \quad 3 \quad 2]^{T}$

Và hướng của B so với khung tọa độ toàn cục G có thể được tìm bằng cách quay 45 độ theo trục X, sau đó quay 45 độ theo trục Y.

2. Quay toàn cục và dịch chuyển tịnh tiến toàn cục.



Hình 2-33 Khối lập phương tại góc dương của hệ tọa độ toàn cục.

Một khung tọa độ vật thể B quay 90 độ quanh trục Z, sau đó quay 90 độ quanh trục X.

a. Xác định ma trận biến đổi ${}^{G}T_{B}$.

b. Xác định các tọa độ toàn cục của ${}^{B}\mathbf{r}_{P} = [1 \quad 1 \quad 1]^{T}$ sau các phép quay.

c. Xác định một phép quay duy nhất xoay quanh một trục duy nhất để xoay B đến vị trí mới của nó.

d. Nếu vật thể là một khối lập phương ở góc dương của hệ tọa độ toàn cục sao cho P là góc xa nhất của khối lập phương so với gốc tọa độ, sau đó xác định vector dịch chuyển cần thiết ${}^{G}\mathbf{d}$ để di chuyển khối lập phương trở lại góc phần tư thứ nhất.

e. Xác định các tọa độ toàn cục của điểm P sau khi di chuyển khối hộp trở lại góc phần tư thứ nhất.

3. Khả năng tương thích của ma trận quay

Không thể tìm được ${}^{G}R_{B}$ từ phương trình của chuyển động vật thể rắn.

$$ {}^{G}\mathbf{r}_{P} = {}^{G}R_{B}\,{}^{B}\mathbf{r}_{P} + {}^{G}\mathbf{d} $$

Nếu ${}^{G}\mathbf{r}_{P}$, ${}^{B}\mathbf{r}_{P}$ và ${}^{G}\mathbf{d}$ đã được cho trước. Giải thích tại sao và tìm các điều kiện cần thiết để có thể tìm được ${}^{G}R_{B}$.

4. Vị trí toàn cục với xoay cục bộ trong chuyển động của một vật thể rắn.

Giả sử một hệ tọa độ vật thể B được đặt ở ${}^{G}\mathbf{d} = [4 \quad -3 \quad 7]^{T}$

Tìm ${}^{G}\mathbf{r}_{P}$ nếu vị trí cục bộ của một điểm là ${}^{B}\mathbf{r}_{P} = [7 \quad 3 \quad 2]^{T}$

Và hướng của B so với hệ tọa độ toàn cục G có thể được xác định bằng cách quay 45 độ quanh trục x, sau đó quay 45 độ quanh trục y.

5. Xoay cục bộ và dịch toàn cục.

Một khung tọa độ vật thể B quay 90 độ quanh trục z, sau đó quay 90 độ quanh trục x.

a. Xác định ma trận biến đổi ${}^{G}T_{B}$.

b. Xác định các tọa độ toàn cục của ${}^{B}\mathbf{r}_{P} = [1 \quad 1 \quad 1]^{T}$ sau các phép xoay.

c. Xác định một phép quay duy nhất xoay quanh một trục duy nhất để xoay B đến cấu hình mới của nó.

6. Quay toàn cục lặp lại.

Khung tọa độ vật thể B quay 90 độ quanh trục Z, sau đó quay 90 độ quanh trục Y.

a. Xác định ma trận biến đổi ${}^{G}T_{B}$.

b. Xác định các tọa độ toàn cục của ${}^{B}\mathbf{r}_{P} = [1 \quad 1 \quad 1]^{T}$ sau các phép xoay.

c. Xác định một phép quay duy nhất xoay quanh một trục duy nhất để xoay B đến cấu hình mới của nó.

d. Giả sử rằng vật thể là một hình lập phương ở góc dương của khung tọa độ toàn cục như được hiển thị trong Hình 2-33. Điểm P là góc xa nhất của hình lập phương so với gốc tọa độ. Chứng minh rằng nếu chúng ta lặp lại các phép xoay kết hợp của ý (a) ba lần, hình lập phương sẽ quay về vị trí và hướng ban đầu của nó.

e. Sau khi xoay 90 độ quanh trục Z, sau đó 90 độ quanh trục Y, hãy xoay khối ϕ quanh ${}^{G}\mathbf{u} = [1 \quad 1 \quad 1]^{T}$. cần xoay ϕ bao nhiêu độ để đưa khối lập phương trở lại vị trí và hướng ban đầu của nó?

7. Quay toàn cục và cục bộ trong chuyển động cơ thể cứng.

Một hệ tọa độ của vật thể B được dịch chuyển đến ${}^{G}\mathbf{d} = [4 \quad -3 \quad 7]^{T}$

Tìm ${}^{G}\mathbf{r}_{P}$ nếu vị trí cục bộ của một điểm là ${}^{B}\mathbf{r}_{P} = [7 \quad 3 \quad 2]^{T}$

Và hướng của B so với khung toàn cục G có thể được tìm thấy bằng cách xoay 45 độ quanh trục X, sau đó xoay 45 độ quanh trục y, và cuối cùng là xoay 45 độ quanh trục z.

8. Kết hợp các chuyển động cứng.

Khung tọa độ B_1 được xoay 35 độ quanh trục z_1 và dịch chuyển tới ${}^{2}\mathbf{d} = [-40 \quad 30 \quad 20]^{T}$

So với một khung tọa độ khác là B_2. Hướng của khung B_2 trong khung tọa độ toàn cục G có thể được xác định bằng một phép quay 55 độ quanh $\mathbf{u} = [2 \quad -3 \quad 4]^{T}$. Tính ${}^{G}\mathbf{d}_{1}$ và ${}^{G}R_{1}$.

9. Chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay toàn cục.

Xác định ma trận biến đổi cho khối lập phương đơn vị của Hình 2-33 sau:

a. Xoay 90 độ quanh trục Z tiếp theo là một dịch chuyển đơn vị theo trục x.

b. Xác định tọa độ toàn cục của điểm P sau khi chuyển động ở ý (a).

c. Lặp lại chuyển động trong ý (a) bốn lần. Khối lập phương sẽ quay về vị trí ban đầu của nó. Xác định tọa độ của P sau mỗi chuyển động.

10. Ma trận chuyển đổi đồng nhất có ma trận con xoay.

Tìm các phần tử thiếu trong ma trận biến đổi đồng nhất $[T]$.

$$[T] = \begin{bmatrix} ? & 0 & ? & 4 \\ 0.707 & ? & ? & 3 \\ ? & ? & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Góc và trục quay.

Tìm góc và trục quay cho $[T]$ và T^{-1}.

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Kết hợp các biến đổi đồng nhất.

Giả sử gốc của các hệ tọa độ B_1 và B_2 đặt tại:

$$^{2}\mathbf{d}_1 = [-10 \quad 20 \quad -20]^T$$
$$^{G}\mathbf{d}_2 = [-15 \quad -20 \quad 30]^T$$

Hướng của B_1 trong B_2 có thể được xác định bằng cách quay 60 độ quanh

$$^{2}\mathbf{u} = [1 \quad -2 \quad 4]^T$$

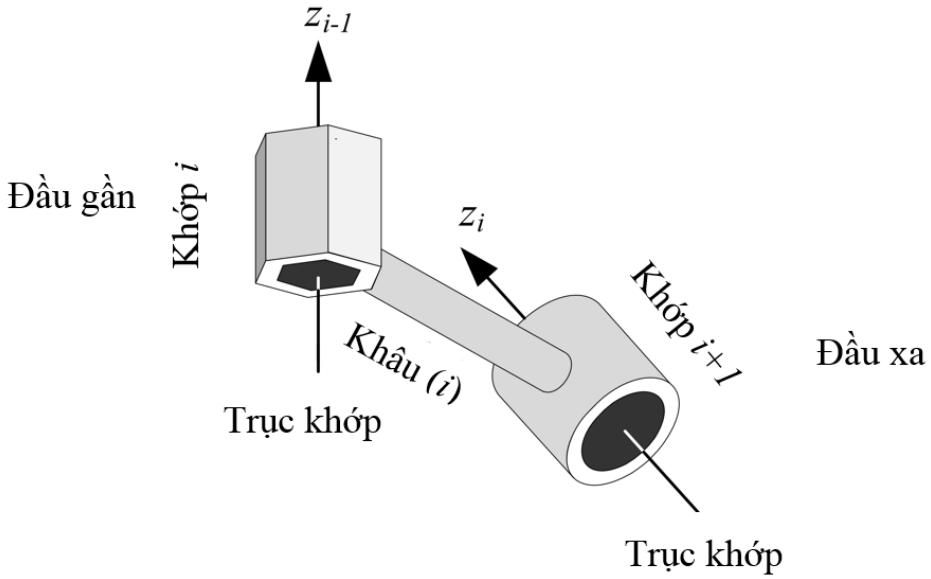
Và hướng của B_2 trong khung tọa độ toàn cục G có thể được tìm bằng cách quay 30 độ quanh

$$G_{\mathbf{u}} = [4 \quad 3 \quad -4]^T$$

Tính ma trận biến đổi $^{G}T_2$, $^{G}T_2^{-1}$, $^{G}T_1$ và $^{G}T_1^{-1}$.

2.5. Động học thuận

Biết được các biến khớp của một robot, chúng ta có thể xác định vị trí và hướng mỗi khâu của robot. Chúng ta gắn một hệ tọa độ cho mỗi khâu và xác định cấu hình của nó trong các khung tọa độ gần kề bằng cách sử dụng phương pháp chuyển động cứng. Phân tích như vậy được gọi là *động học thuận*.

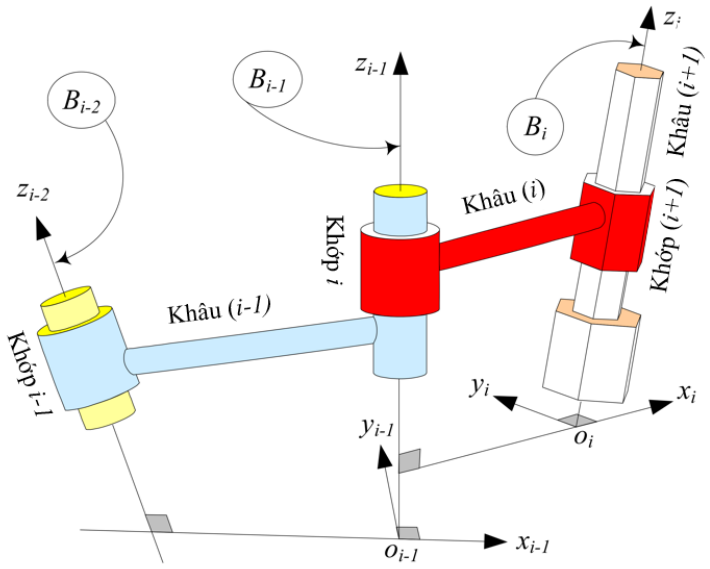


Hình 2-34 Khâu (i) và khớp liền trước của nó là khớp (i - 1) và khớp liền sau của nó là khớp (i) [1].

2.5.1. Ký hiệu Denavit-Hartenberg

Một robot chuỗi với n khớp sẽ có $n + 1$ khâu. Việc đánh số các khâu bắt đầu từ (0) cho khâu đế cố định và tăng dần theo thứ tự lên đến (n) cho khâu chấp hành cuối. Việc đánh số các khớp bắt đầu từ 1, cho khớp kết nối khâu động đầu tiên với khâu đế, và tăng dần lên đến n. Do đó, khâu (i) được kết nối với khâu liền trước $(i - 1)$ ở đầu gần của nó bằng khớp i và được kết nối với khâu liền sau $(i + 1)$ ở đầu xa của nó bằng khớp $i + 1$, như được hiển thị trong Hình 2-34.

Hình 2-35 cho thấy các khâu $(i - 1), (i)$, và $(i + 1)$ của một robot nối tiếp, cùng với các khớp $i - 1, i,$ và $i + 1$. Mỗi khớp được xác định bằng trục của nó, có thể là dịch chuyển tịnh tiến hoặc quay. Để liên kết thông tin động học của các khâu robot, ta cố định hệ tọa độ cục bộ B_i cho mỗi khâu (i) tại khớp $i + 1$ dựa trên phương pháp tiêu chuẩn sau đây, được biết đến là phương pháp Denavit-Hartenberg (DH).



Hình 2-35 Các khâu $(i - 1), (i)$, và $(i + 1)$ cùng với các hệ tọa độ B_i và B_{i+1} [1].

1. Trục z_i được đặt trùng với trục khớp $i + 1$.

Tất cả các khớp được biểu diễn bằng trục z. Bắt đầu bằng việc xác định các trục z_i. Hướng dương của trục z_i là tùy ý. Việc xác định các trục khớp cho các khớp quay là rõ ràng, tuy nhiên, khớp trượt có thể chọn bất kỳ trục nào song song với hướng dịch chuyển. Bằng cách gán các trục z_i, các cặp khâu ở hai bên của mỗi khớp, và cũng hai khớp ở hai bên của mỗi khâu cũng được xác định.

Mặc dù các trục z_i của hai khớp ở hai đầu của một khớp có thể nghiêng, nhưng chúng ta thiết kế các robot công nghiệp sao cho các trục z_i là song song, vuông góc hoặc chéo nhau. Hai trục khớp song song được xác định bằng một biểu tượng song song, (||). Hai trục khớp vuông góc nếu trục của chúng giao nhau với góc vuông. Trục khớp vuông góc được xác định bằng một biểu tượng vuông góc, (⊢). Hai khớp là vuông góc nếu trục của chúng tạo góc vuông với pháp tuyến chung của chúng. Trục khớp vuông góc được xác định bằng một biểu tượng vuông góc, (⊥).

2. Trục x_i được xác định dọc theo pháp tuyến chung giữa các trục z_{i-1} và z_i, hướng từ trục z_{i-1} đến trục z_i.

Nói chung, các trục z có thể là các đường chéo, tuy nhiên luôn có một đường thẳng vuông góc chung đối với hai đường chéo bất kỳ, được gọi là pháp tuyến chung. Pháp tuyến chung có khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường chéo.

Khi hai trục z là song song, có vô số các pháp tuyến chung. Trong trường hợp đó, chúng ta chọn pháp tuyến chung mà cùng phương với pháp tuyến chung của các khớp trước đó.

Khi hai trục z giao nhau, không có pháp tuyến chung giữa chúng. Trong trường hợp đó, chúng ta gán trục x_i vuông góc với mặt phẳng được tạo ra bởi hai trục z theo hướng của $z_{i-1} \times z_i$.

Trong trường hợp hai trục z là song song, sắp xếp các khớp không trùng lặp là hoặc $P \,||\, R$ hoặc $R \,||\, P$. Do đó, chúng ta gán trục x_i sao cho biến khớp có giá trị là $\theta_i = 0$ trong tư thế nghỉ của robot.

3. Trục y_i được xác định bằng quy tắc bàn tay phải, $y_i = z_i \times x_i$.

Nói chung, chúng ta gán hệ tọa độ tham chiếu cho mỗi khâu sao cho một trong ba trục tọa độ x_i, y_i hoặc z_i (thường là x_i) được đặt theo trục của khớp cuối.

Bằng cách áp dụng phương pháp DH, gốc o_i của hệ tọa độ $B_i(o_i, x_i, y_i, z_i)$, được gắn vào khâu (i), được đặt tại điểm giao nhau của trục khớp $i+1$ với pháp tuyến chung giữa trục z_{i-1} và z_i.

Một hệ tọa độ DH được xác định bởi bốn thông số: a_i, α_i, θ_i và d_i.

1. *Độ dài của khâu* a_i là khoảng cách giữa các trục z_{i-1} và z_i dọc theo trục x_i. $a_i$là độ dài động học của khâu (i).

2. *Độ xoắn của khâu* α_i là sự quay cần thiết của trục z_{i-1} quanh trục x_i để trở thành song song với trục z_i.

3. *Khoảng cách giữa các khớp* d_i là khoảng cách giữa các trục x_{i-1} và x_i theo hướng trục z_{i-1}. Khoảng cách giữa các khớp cũng được gọi là *độ lệch của khâu* (link offset).

4. *Góc khớp* θ_i là sự quay cần thiết của trục x_{i-1} quanh trục z_{i-1} để trở thành song song với trục x_i.

Các thông số khung DH của các khâu trong Hình 2-35 được minh họa trong Hình 2-36. Các thông số θ_i và d_i được gọi là thông số khớp, vì chúng xác định vị trí tương đối của hai khâu kề nhau được kết nối tại khớp i. Trong một thiết kế cụ thể cho một robot, mỗi khớp có thể là quay hoặc trượt. Do đó, đối với mỗi khớp, luôn luôn sẽ có trường hợp là hoặc θ_i hoặc d_i được cố định và cái còn lại là biến thiên. Đối với một khớp quay (R) tại khớp i, giá trị của d_i được cố định, trong khi θ_i là biến số duy nhất của khớp. Đối với một khớp trượt (P), giá trị của θ_i được cố định và d_i là biến số duy nhất của khớp. Tham số biến thiên θ_i hoặc d_i được gọi là biến số của khớp. Các thông số khớp θ_i và d_i xác định một chuyển động xoắn vít vì θ_i là một phép xoay quanh trục z_{i-1}, và d_i là một phép dịch chuyển dọc theo trục z_{i-1}.

Các tham số α_i và a_i được gọi là các tham số khâu, bởi vì chúng xác định các vị trí tương đối của các khớp i và $i + 1$ ở hai đầu của khâu (i). Tham số xoắn của khâu α_i là góc quay của trục z_{i-1} xoay quanh trục x_i để trở thành song song với trục z_i. Tham số khâu khác, a_i, là sự dịch chuyển theo trục x_i để đưa trục z_{i-1} lên trục z_i. Các tham số khâu α_i và a_i xác định một chuyển động xoắn vít vì α_i là một phép quay xoay quanh trục x_i và a_i là một phép dịch chuyển theo trục x_i.

Nói cách khác, chúng ta có thể di chuyển trục z_{i-1} tới trục z_i bằng một vít me trung tâm $\check{s}(a_i, \alpha_i, \hat{\imath})$, và di chuyển trục x_{i-1} tới trục x_i bằng một vít me trung tâm $\check{s}(d_i, \theta_i, \hat{k}_{i-1})$.

Ví dụ 2-68: Đơn giản hóa cho phương pháp DH.

Một số nhận xét để đơn giản hóa việc áp dụng phương pháp khung DH.

1. Chỉ hiển thị các trục z và x là đủ để xác định một hệ tọa độ. Việc vẽ sẽ rõ ràng hơn khi không hiển thị các trục y.

2. Nếu các khớp đầu tiên và cuối cùng là R, thì

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \tag{2-328}$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_n = 0. \tag{2-329}$$

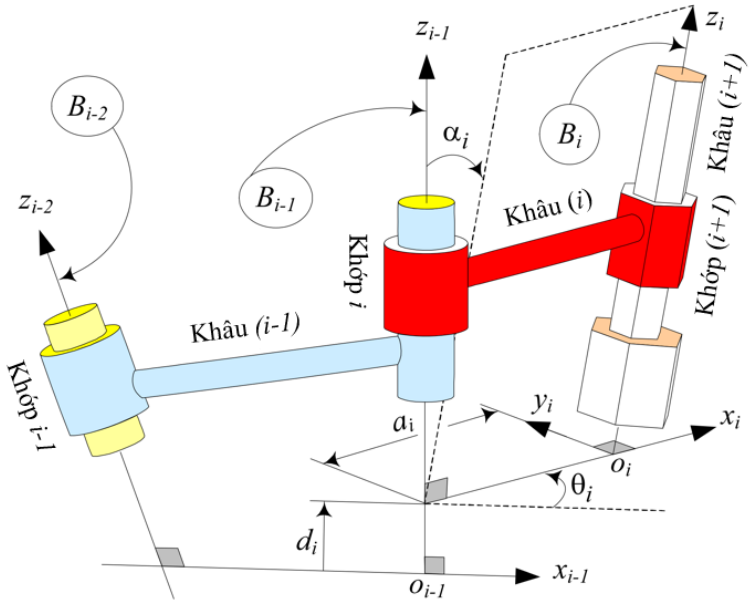
Trong những trường hợp này, vị trí không cho θ_1 và θ_n có thể được chọn tùy ý, và độ lệch khâu có thể được đặt thành không.

$$d_1 = 0\,,\ d_n = 0 \tag{2-330}$$

3. Nếu các khớp đầu và cuối cùng là P, thì

$$\theta_1 = 0\,,\ \theta_n = 0 \tag{2-331}$$

và vị trí không cho d_1 và d_n có thể được chọn một cách tùy ý, nhưng thường chúng ta chọn chúng để làm cho nhiều tham số nhất có thể bằng không.



Hình 2-36 Các thông số DH gồm $a_i, \alpha_i, \theta_i, d_i$ xác định đối với khớp i và khâu (i) [1].

4. Nếu khớp cuối n là R, chúng ta chọn x_n sao cho nó trùng với x_{n-1} khi $\theta_n = 0$ và gốc của B_n được chọn sao cho $d_n = 0$. Nếu khớp cuối n là P, chúng ta chọn x_n sao cho $\theta_n = 0$ và gốc của B_n được chọn tại giao điểm của x_{n-1} và trục khớp n sao cho $d_n = 0$.

5. Mỗi khâu, trừ khâu đế và khâu chấp hành cuối, đều là một liên kết nhị phân và được kết nối với hai khâu khác.

6. Các tham số a_i và α_i được xác định bởi thiết kế hình học của robot và luôn luôn là hằng số. Khoảng cách d_i là khoảng cách lệch của khung B_i so với B_{i-1} theo hướng trục z_{i-1}. Vì a_i là một độ dài, nên $a_i \geq 0$.

7. Các góc α_i và θ_i có hướng. Hướng dương được xác định bằng quy tắc bàn tay phải tương ứng với hướng của x_i và z_{i-1}.

8. Đối với robot công nghiệp, góc xoắn của khâu, α_i, thường là một bội số của $\pi/2$ radian.

9. Các khung tọa độ DH không duy nhất vì hướng của các trục z_i là tùy ý.

10. Khung tọa độ khâu đế $B_0(x_0, y_0, z_0) = G(X, Y, Z)$ là khung tọa độ toàn cục cho một robot cố định. Để thuận tiện, ta chọn trục Z song song với trục của khớp 1, và đặt gốc O tại nơi các trục của khung tọa độ G đồng phẳng hoặc song song với các trục của khung tọa độ B_1 ở vị trí nghỉ.

11. Cấu hình của một robot mà tất cả các biến khớp đều bằng không được gọi là cấu hình gốc hoặc vị trí nghỉ, là điểm tham chiếu cho tất cả các chuyển động của robot. Vị trí nghỉ tốt nhất là khi nó làm cho nhiều trục song song với nhau và trên cùng một mặt phẳng nhất có thể.

12. Ta có thể nới lỏng định nghĩa DH cho hướng của x_i , sao cho nó chỉ từ z_i đến z_{i-1} và vẫn thu được một tham số DH hợp lệ. Việc đảo hướng của x_i nhằm thiết lập một hệ tọa độ tham chiếu thuận tiện hơn khi hầu hết các tham số khớp đều bằng không.

13. Bảng tham số DH giúp thiết lập một hệ thống khung tọa độ cho các khâu một cách có tổ chức. Như được thể hiện trong Bảng 2-2, một bảng DH có năm cột cho chỉ số khung tọa độ và bốn tham số DH. Các hàng của bốn tham số DH cho mỗi khung tọa độ sẽ được điền bởi các tham số cố định và biến khớp. Biến khớp có thể được xác định bằng cách xem xét khung tọa độ và khâu nào sẽ di chuyển với mỗi khớp hoạt động biến đổi.

Bảng 2-2 Bảng tham số DH để thiết lập các khung tọa độ của khâu.

Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	α_1	d_1	θ_1
2	a_2	α_2	d_2	θ_2
... ...	.....	... ...	... ...	... ...
j	a_j	α_j	d_j	θ_j
... ...	.....	.....	... ...	... ...
n	a_n	α_n	d_n	θ_n

Ví dụ 2-69: Bảng DH và các hệ tọa độ cho cánh tay robot 3R trong mặt phẳng.

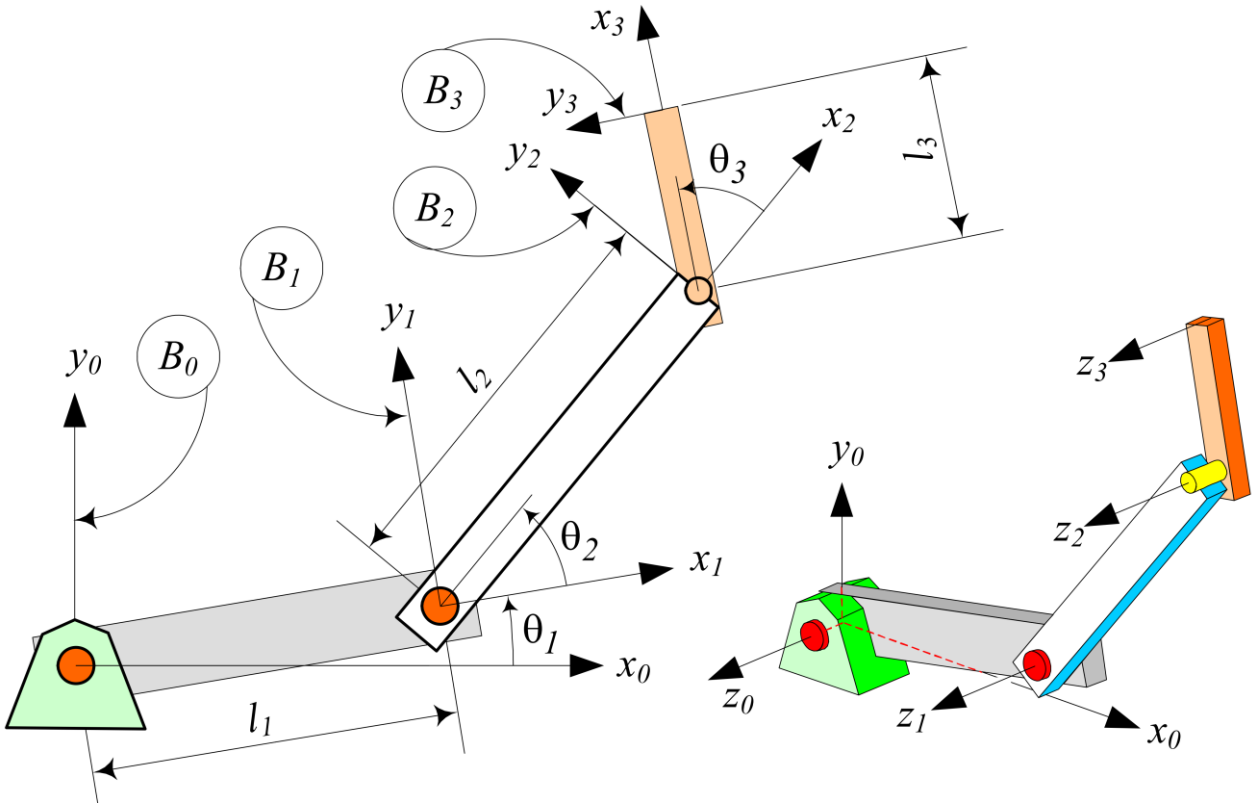
R đại diện cho quay (revolute), do đó, một cánh tay robot $R||R||R$ là một robot phẳng với ba khớp quay song song. Hình 2-37 minh họa một robot phẳng $3R$. Bảng DH có thể được điền như được hiển thị trong Bảng 2-3, và các khung tọa độ liên kết có thể được thiết lập như được hiển thị trong Hình 2-37.

Bảng 2-3 Bảng DH cho cánh tay robot phẳng 3R trong Hình 2-37.

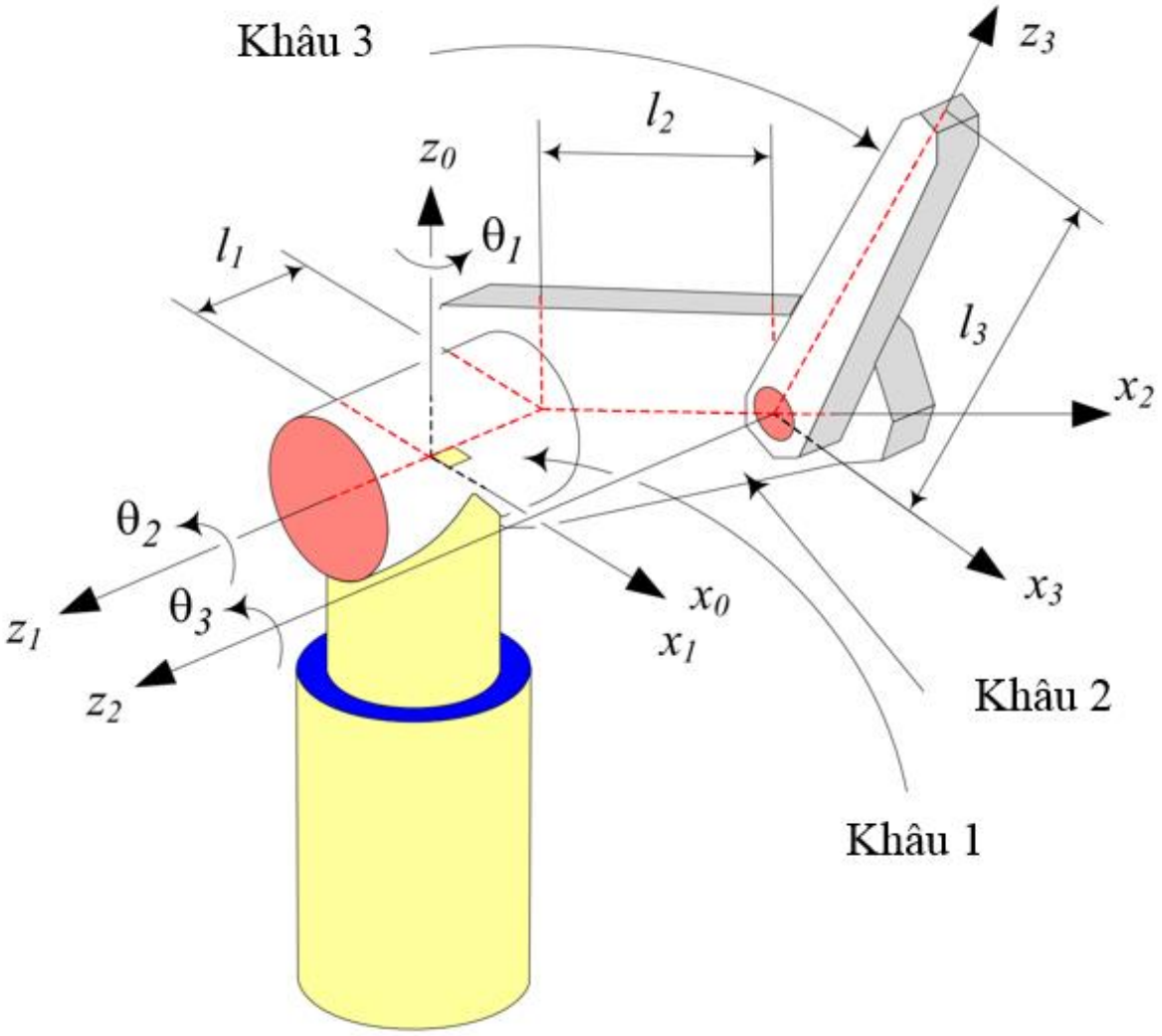
Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

Ví dụ 2-70: Khung tọa độ cho một robot PUMA 3R.

Một cánh tay robot PUMA được hiển thị trong Hình 2-38 có $R \vdash R \parallel R$ các khớp quay chính, bỏ qua cấu trúc của khâu chấp hành cuối của robot. Hệ tọa độ được gắn vào các khâu của robot được xác định trong Hình 2-38 và được liệt kê trong Bảng 2-4.



Hình 2-37 Minh họa một robot điều khiển 3R trên mặt phẳng và các khung tọa độ DH của mỗi khớp.



Hình 2-38 Cánh tay robot PUMA 3R và khung tọa độ các khâu [1].

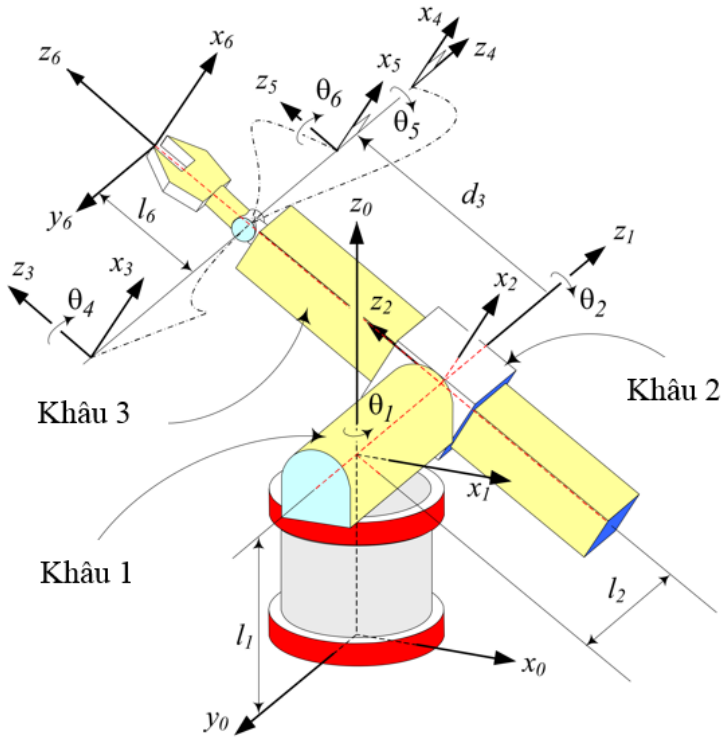
Bảng 2-4 Bảng DH cho cánh tay robot 3R PUMA được hiển thị trong Hình 2-38.

Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90°	0	θ_1
2	l_2	0	l_1	θ_2
3	0	−90°	0	θ_3

Các trục khớp của cánh tay robot $R \perp R \parallel R$ được gọi là trục xoay chung z_0, trục vai z_1, và trục khuỷu tay z_2. Thông thường, các trục khớp z_1 và z_2 là song song, và vuông góc với z_0.

Ví dụ 2-71: Cánh tay robot Stanford.

Minh họa sơ đồ của cánh tay Stanford, một robot cầu $R \vdash R \vdash P$ được gắn vào một cổ tay cầu $R \vdash R \vdash R$, được hiển thị trong Hình 2-39.



Hình 2-39 Cánh tay robot Stanford $R \vdash R \vdash P$; $R \vdash R \vdash R$ [1].

Các tham số DH của cánh tay Stanford được liệt kê trong Bảng 2-5. Robot này có 6 DOF: $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$.

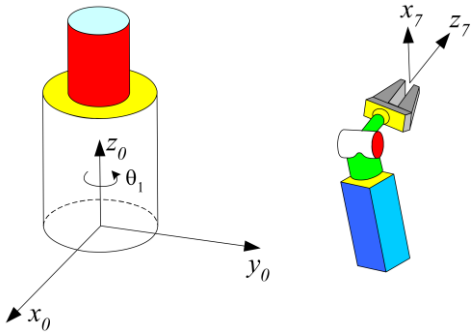
Bảng 2-5 Bảng DH cho cánh tay Stanford được hiển thị trong Hình 2-39.

Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-90°$	l_1	θ_1
2	0	$90°$	l_2	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	0	$-90°$	0	θ_4
5	0	$90°$	0	θ_5
6	0	0	l_6	θ_6

Ví dụ 2-72: Khung tọa độ đặc biệt.

Trong một cánh tay máy robot, một số khung tọa độ có các tên đặc biệt.

Khung tọa độ khâu đế B_0 hoặc G là liên kết cố định trên đó robot được lắp đặt. Đó là khung tọa cơ sở mà mọi thông tin động học phải được tính toán vì điểm xuất phát, đường đi của chuyển động và điểm đến của khâu chấp hành cuối được xác định trong khung tọa độ này. Khung tọa độ cơ sở được minh họa trong Hình 2-40.



Hình 2-40 Khung tọa độ cơ sở và khung tọa độ khâu chấp hành cuối

Khung tọa độ trạm S (station frame), cũng được gọi là *khung wolrd* hoặc *khung universe*, là khung tọa độ trong đó các động học của robot được tính toán. Khung trạm quan trọng khi có nhiều robot được lắp đặt trong một xưởng, hoặc robot di động.

Các khung tọa độ cổ tay W được lắp đặt tại điểm cổ tay nơi bàn tay được gắn vào cánh tay của robot. Bàn tay của các robot công nghiệp thường được gắn vào một cơ cấu cổ tay với ba trục quay vuông góc.

Khung tọa độ công cụ T được gắn vào cuối của bất kỳ công cụ nào mà robot đang cầm. Nó cũng có thể được gọi là khung tọa độ khâu chấp hành cuối (end-effector) hoặc khung tọa độ cuối cùng. Khi tay rỗng, khung tọa độ công cụ được chọn sao cho gốc của nó nằm giữa đầu ngón tay của robot. Khung tọa độ công cụ được minh họa trong Hình 2-40.

Khung tọa độ mục tiêu F là vị trí mà robot cần di chuyển công cụ đến. Khung mục tiêu được xác định so với khung tọa độ trạm.

Ví dụ 2-73: Chuyển đổi từ B_{i-1} sang B_i.

Hai hệ tọa độ lân cận có thể được đưa vào trùng nhau thông qua một số chuỗi dịch chuyển tịnh tiến và xoay. Bộ bốn phép xoay và dịch chuyển tịnh tiến sau đây là một phương pháp trực tiếp để di chuyển hệ tọa độ B_{i-1} để trùng với hệ tọa độ B_i.

1. Tịnh tiến khung tọa độ B_{i-1} theo trục z_{i-1}bằng khoảng d_i.
2. Xoay khung tọa độ B_{i-1} qua góc θ_i xung quanh trục z_{i-1}.
3. Tịnh tiến khung tọa độ B_{i-1} theo trục x_i một khoảng a_i .
4. Xoay khung tọa độ B_{i-1} qua góc α_i quanh trục x_i.

Tuy nhiên, để tạo ma trận biến đổi, chúng ta cần bắt đầu từ hai hệ tọa độ trùng nhau B_i và B_{i-1} tại cấu hình hiện tại của B_{i-1}, sau đó di chuyển B_i đến vị trí hiện tại của nó. Do đó, chúng ta phải tuân theo trình tự các phương thức sau đây:

1. Quay khung tọa độ B_i qua góc α_i xung quanh trục x_{i-1}.
2. Tịnh tiến khung tọa độ B_i dọc theo trục x_{i-1} theo khoảng a_i.
3. Xoay khung tọa độ B_i qua góc θ_i quanh trục z_{i-1}.
4. Tịnh tiến khung tọa độ B_i theo trục z_{i-1} với khoảng d_i.

Trong những phương thức này, B_{i-1} đóng vai trò là hệ tọa độ toàn cục cho hệ tọa độ cục bộ B_i, và những chuyển động này xảy ra xung quanh và theo các trục toàn cục.

Ví dụ 2-74: Nhược điểm của phương pháp Denavit-Hartenberg.

Phương pháp Denavit-Hartenberg để mô tả các khung tọa độ khâu không phải là duy nhất cũng như không phải là phương pháp tốt nhất. Nhược điểm của phương pháp DH là

1. Trục tọa độ liên tiếp được xác định sao cho gốc o_i và trục x_i được xác định trên đường thẳng vuông góc chung với các trục nối liền kề. Điều này có thể là một nhiệm vụ khó khăn phụ thuộc vào hình học của các khâu, và có thể tạo ra kỳ dị.

2. Ký hiệu DH không thể mở rộng cho các khớp tam phân và các khâu kết hợp.

2.5.2. Biến đổi giữa hai hệ tọa độ lân cận

Khung tọa độ B_{i} được cố định trên khâu (i), và khung tọa độ $B_{\mathrm{i-1}}$ được cố định trên khâu $(i-1)$. Dựa trên quy ước Denavit-Hartenberg, ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$ để chuyển đổi khung tọa độ B_i sang B_{i-1} được biểu diễn như là một tích của bốn phép biến đổi cơ bản sử dụng các thông số của khâu (i) và khớp i.

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}T_i &= D_{z_{i-1},d_i} R_{z_{i-1},\theta_i} D_{x_{i-1},a_i} R_{x_{i-1},\alpha_i} \\
&= \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i cos\alpha_i & sin\theta_i sin\alpha_i & a_i cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i cos\alpha_i & -cos\theta_i sin\alpha_i & a_i sin\theta_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-332}
$$

$$
R_{x_{i-1},\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_i & -sin\alpha_i & 0 \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-333}
$$

$$
D_{x_{i-1},a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-334}
$$

$$
R_{z_{i-1},\theta_i} = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i & 0 & 0 \\ sin\theta_i & cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-335}
$$

$$
D_{z_{i-1},d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-336}
$$

Vì vậy, phương trình biến đổi từ hệ tọa độ $B_i(x_i, y_i, z_i)$ sang hệ tọa độ trước đó của nó $B_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ là:

$$
\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{i-1}T_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-337}
$$

Trong đó,

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i cos\alpha_i & sin\theta_i sin\alpha_i & a_i cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i cos\alpha_i & -cos\theta_i sin\alpha_i & a_i sin\theta_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}338) $$

Có thể chia ma trận 4 × 4 này thành hai ma trận phụ, mỗi ma trận đại diện cho một phép quay duy nhất kết hợp với một phép dịch chuyển tịnh tiến duy nhất để tạo ra chuyển động cứng mà được yêu cầu để di chuyển từ B_i đến B_{i-1}.

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}\boldsymbol{d}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}339) $$

Trong đó

$$ {}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i cos\alpha_i & sin\theta_i sin\alpha_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i cos\alpha_i & -cos\theta_i sin\alpha_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (2\text{-}340) $$

Và

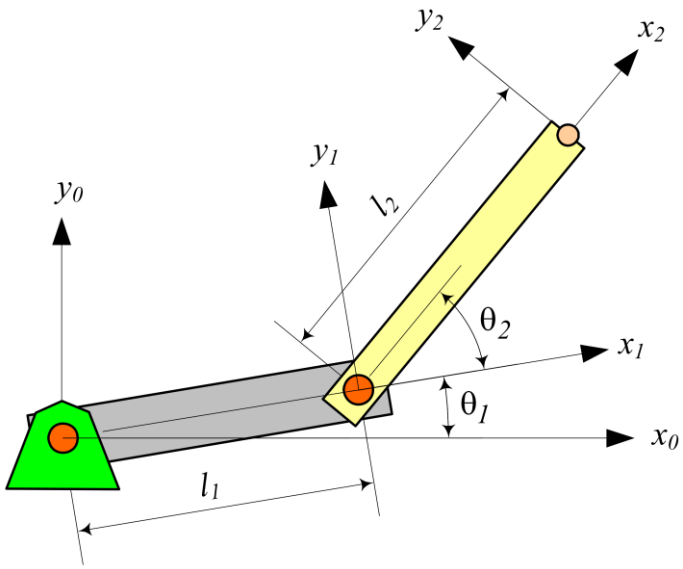
$$ {}^{i-1}\boldsymbol{d}_i = \begin{bmatrix} a_i cos\theta_i \\ a_i sin\theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (2\text{-}341) $$

Kết quả nghịch đảo của ma trận biến đổi đồng nhất (2-338) là

$$ \begin{aligned} {}^{i}T_{i-1} &= {}^{i-1}T_i^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta_i & sin\theta_i & 0 & -a_i \\ -sin\theta_i cos\alpha_i & cos\theta_i cos\alpha_i & sin\alpha_i & -d_i sin\alpha_i \\ sin\theta_i sin\alpha_i & -cos\theta_i sin\alpha_i & cos\alpha_i & -d_i cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}342) $$

Ví dụ 2-75: Ma trận biến đổi DH cho cánh tay robot phẳng $2R$.

Hình 2-41 minh họa một cánh tay robot phẳng $R \parallel R$ và các khung tọa độ khâu DH của nó.



Hình 2-41 Minh họa về một cánh tay robot phẳng 2R và các khung tọa độ DH của mỗi khâu.

Bảng 2-6 Bảng DH cho cánh tay robot phẳng 2R.

Khung tọa độ	α_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2

Dựa trên Bảng DH Bảng 2-6, chúng ta có thể tìm các ma trận biến đổi từ khung B_i sang khung B_{i-1} bằng cách thay thế trực tiếp các tham số DH vào Phương trình (2-338). Do đó,

$$^{1}T_2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}343)$$

$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & l_1sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}344)$$

và do đó

$$\begin{aligned} ^{0}T_2 &= {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2 \\ &= \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}345)$$

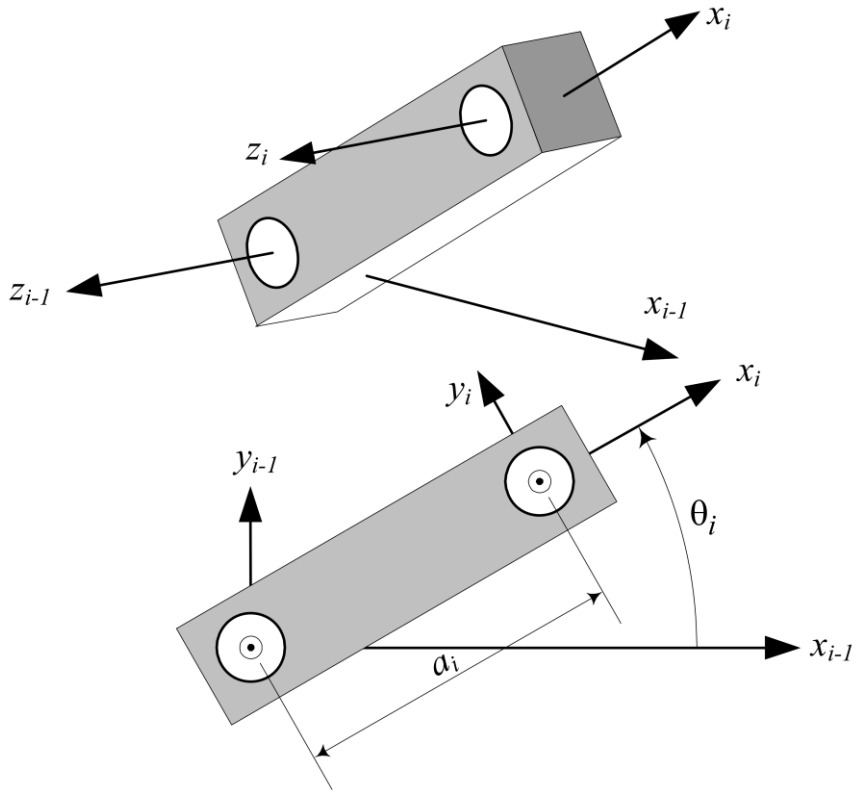
Ví dụ 2-76: Khâu với các khớp $R \parallel R$ hoặc $R \parallel P$.

Khi khớp gần nhất của khâu (i) là xoay và khớp xa là xoay hoặc trượt, và trục khớp ở hai đầu là song song như được hiển thị trong Hình 2-42, sau đó $\alpha_i = 0$ độ (hoặc $\alpha_i = 180$ độ), a_i là khoảng cách giữa các trục khớp, và θ_i là tham số biến số duy nhất. Khoảng cách khớp di $d_i = \text{const}$ là khoảng cách giữa gốc của B_i và B_{i-1} theo hướng z_i, tuy nhiên chúng ta thường thiết lập x_iy_i và $x_{i-1}y_{i-1}$ trong một mặt phẳng để có $d_i = 0$. x_i và x_{i-1} là song song cho một liên kết $R \parallel R$ ở vị trí nghỉ. Do đó, ma trận biến đổi $^{i-1}T_i$ cho một khâu với $\alpha_i = 0$ và các khớp $R \parallel R$ hoặc $R \parallel P$, được biết đến với tên gọi là $R \parallel R(0)$ hoặc $R \parallel P(0)$, là

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i & 0 & a_icos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i & 0 & a_isin\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}346)$$

Trong trường hợp của một khâu với góc $\alpha_i = 180$ độ và các khớp $R \parallel R$ hoặc $R \parallel P$ được biết đến như là $R \parallel R(180)$ hoặc $R \parallel P(180)$ là:

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & sin\theta_i & 0 & a_icos\theta_i \\ sin\theta_i & -cos\theta_i & 0 & a_isin\theta_i \\ 0 & 0 & -1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}347)$$



Hình 2-42 Một khâu song song $R \parallel R(0)$.

Ví dụ 2-77: Khâu với các khớp $R \perp R$ hoặc $R \perp P$.

Khi khớp gần nhất của khâu (i) là xoay và khớp xa là hoặc xoay hoặc trượt, và các trục khớp ở hai đầu vuông góc như được thể hiện trong Hình 2-43, thì $\alpha_i = 90$ độ (hoặc $\alpha_i = -90$ độ), a_i là khoảng cách giữa các trục khớp trên x_i, và θ_i là tham số biến duy nhất. Khoảng cách khớp $d_i = \text{const}$ là khoảng cách giữa gốc của B_i và B_{i-1} theo hướng z_i. Tuy nhiên, chúng ta thường thiết lập $x_i y_i$ và $x_{i-1} y_{i-1}$ trên cùng một mặt phẳng để có $d_i = 0$.

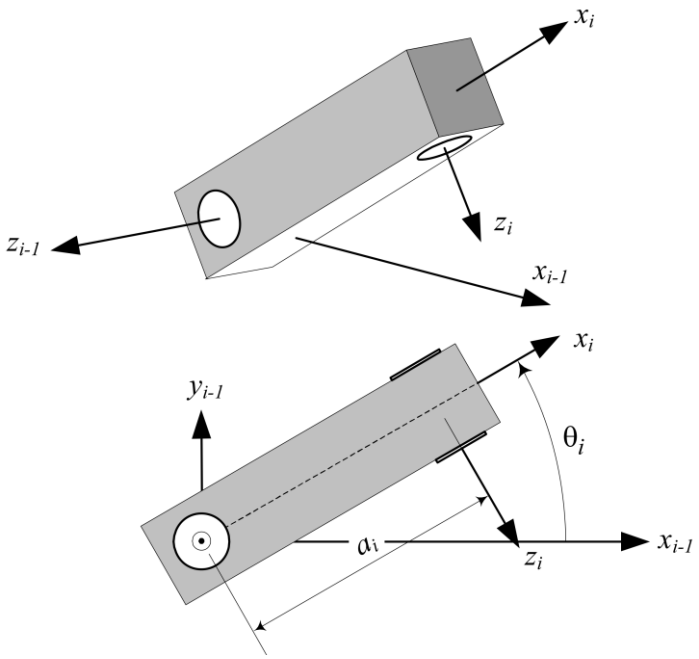
Khâu $R \perp R$ được tạo ra bằng cách xoắn khâu $R \parallel R$ quanh trục tâm của nó theo trục x_{i-1} một góc 90 độ. Các trục x_i và x_{i-1} song song cho một khâu $R \perp R$ ở vị trí nghỉ.

Cho nên, ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$ cho một khâu với $\alpha_i = 90$ độ và các khớp $R \perp R$ hoặc $R \perp P$, được biết đến như $R \perp R(90)$ hoặc $R \perp P(90)$, là

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & 0 & sin\theta_i & a_i cos\theta_i \\ sin\theta_i & 0 & -cos\theta_i & a_i sin\theta_i \\ 0 & 1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-348} $$

Trong trường hợp của một khâu với góc $\alpha_i = -90$ độ và các khớp $R \perp R$ hoặc $R \perp P$ được biết đến như là $R \perp R(-90)$ hoặc $R \perp P(-90)$ là:

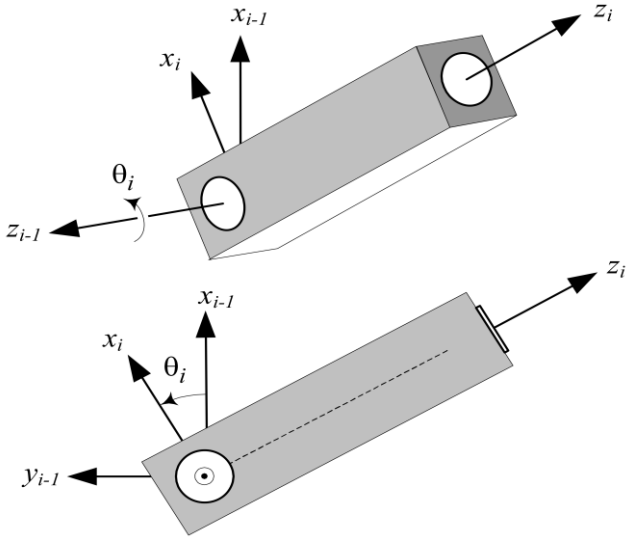
$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & 0 & -sin\theta_i & a_i cos\theta_i \\ sin\theta_i & 0 & cos\theta_i & a_i sin\theta_i \\ 0 & -1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-349} $$



Hình 2-43 Khâu vuông góc $R \perp R(90)$.

Ví dụ 2-78: Khâu với các khớp $R \vdash R$ hoặc $R \vdash P$.

Khi khớp gần nhất của khâu (i) là xoay và khớp xa là xoay hoặc trượt, và các trục khớp ở hai đầu giao nhau vuông góc, như được hiển thị trong Hình 2-44, thì $\alpha_i = 90$ độ (hoặc $\alpha_i = -90$ độ), $a_i = 0$, $d_i = const$ là khoảng cách giữa gốc tọa độ trên z_i, và θ_i là chỉ tham số biến thiên duy nhất. Lưu ý rằng có thể có hoặc giả sử $d_i = 0$. Các trục x_i và x_{i-1} của một liên kết $R \vdash R$ ở vị trí nghỉ đều trùng nhau (khi $d_i = 0$) hoặc song song (khi $d_i \neq 0$).



Hình 2-44 Khâu vuông góc $R \vdash R(90)$.

Vì vậy, ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$ cho một khớp với $\alpha_i = 90$ độ và các khớp $R \vdash R$ hoặc $R \vdash P$, được biết đến là $R \vdash R(90)$ hoặc $R \vdash P(90)$, là

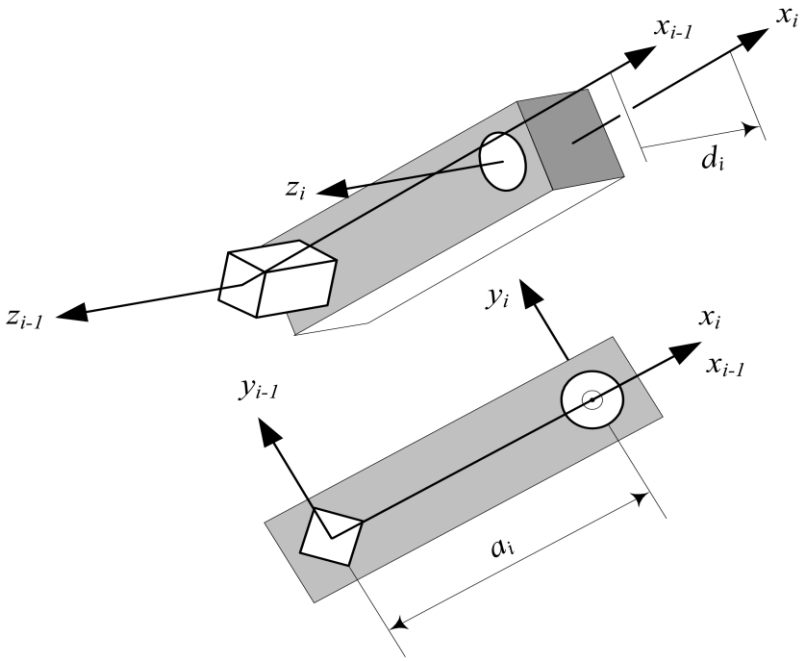
$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & 0 & sin\theta_i & 0 \\ sin\theta_i & 0 & -cos\theta_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}350) $$

Trong trường hợp của một khâu với góc $\alpha_i = -90$ độ và các khớp $R \vdash R$ hoặc $R \vdash P$ được biết đến như là $R \vdash R(-90)$ hoặc $R \vdash P(-90)$ là:

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & 0 & -sin\theta_i & 0 \\ sin\theta_i & 0 & cos\theta_i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}351) $$

Ví dụ 2-79: Khâu với các khớp $P \parallel R$ hoặc $P \parallel P$.

Khi khớp gần nhất của khâu (i) là dạng trượt và khớp xa là hoặc xoay hoặc trượt, và các trục khớp ở hai đầu là song song như được hiển thị trong Hình 2-45, thì $\alpha_i = 0$ độ (hoặc $\alpha_i = 180$ độ), $\theta_i = 0$, a_i là khoảng cách giữa các trục khớp trên x_i, và d_i là tham số biến duy nhất. Lưu ý rằng có thể có $a_i = 0$.



Hình 2-45 Khâu song song $P \parallel R(0)$.

Vì vậy, ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$ cho một khớp với $\alpha_i = 0$ và các khớp $P \parallel R$ hoặc $P \parallel P$, được biết đến là $P \parallel R(0)$ hoặc $P \parallel P(0)$, là

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}352) $$

Trong trường hợp của một khâu với góc $\alpha_i = 180$ độ và các khớp $P \parallel R$ hoặc $P \parallel P$ được biết đến như là $P \parallel R\ (180)$ hoặc $P \parallel P(180)$ là:

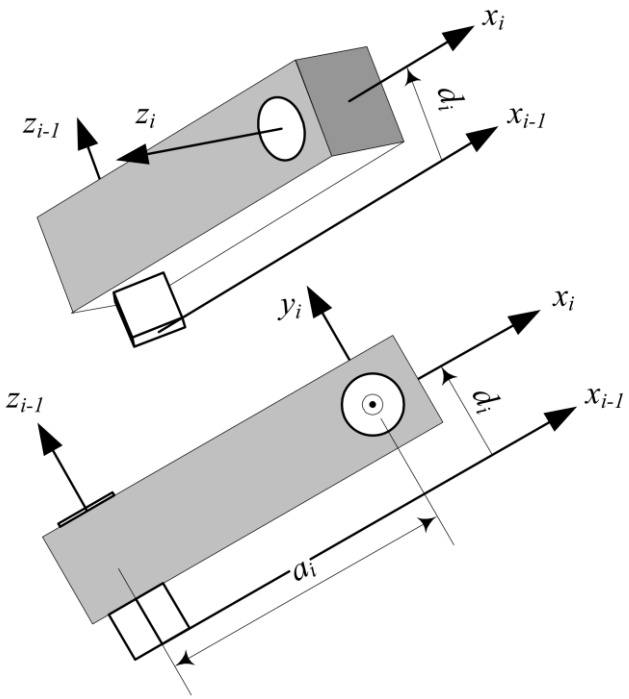
$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}353) $$

Gốc của khung tọa độ B_{i-1} có thể được chọn tại bất kỳ điểm nào trên trục z_{i-1} hoặc song song với trục z_{i-1} một cách tùy ý. Một cách thiết lập đơn giản là đặt gốc o_i của khớp trượt tại

gốc trước đó o_{i-1}. Đặt $a_i = 0$ và hơn nữa, đặt giá trị ban đầu của biến khớp $d_i = 0$, mà sẽ thay đổi khi o_i trượt lên và xuống song song với trục z_{i-1}.

Ví dụ 2-80: Khâu với các khớp $P \perp R$ hoặc $P \perp P$.

Khi khớp gần của khâu (i) là khớp trượt và khớp xa của nó là hoặc quay hoặc trượt, với trục vuông góc như được hiển thị trong Hình 2-46, thì $\alpha_i = 90$ độ (hoặc $\alpha_i = -90$ độ), $\theta_i = 0$, a_i là khoảng cách giữa các trục khớp trên x_i, và d_i là tham số biến số duy nhất.



Hình 2-46 Khâu vuông góc $P \perp P(90)$.

Do đó, ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$ cho một khớp với $\alpha_i = 90$ độ và các khớp $P \perp R$ hoặc $P \perp P$, được biết đến với tên gọi là $P \perp R(90)$ hoặc $P \perp P(90)$, là

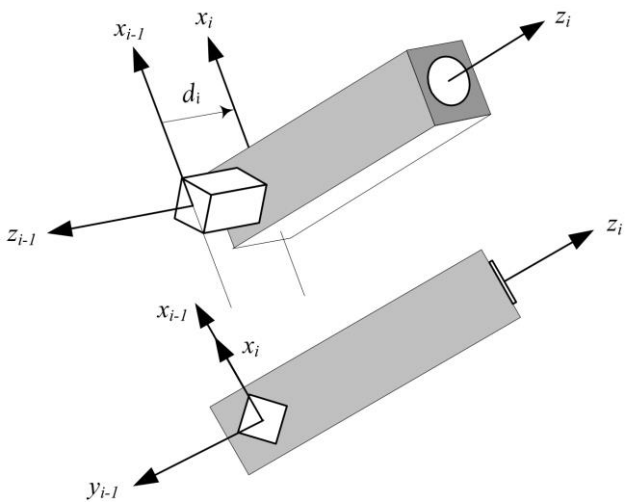
$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-354} $$

Trong trường hợp của một khâu với góc $\alpha_i = -90$ độ và các khớp $P \perp R$ *hoặc* $P \perp P$ được biết đến như là $P \perp R(-90)$ hoặc $P \perp P(-90)$ là:

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-355} $$

Ví dụ 2-81: Khâu với các khớp $P \vdash R$ hoặc $P \vdash P$.

Khi khớp gần của khâu (i) là trượt và khớp xa là quay hoặc trượt, và các trục khớp ở hai đầu giao nhau vuông góc như được hiển thị trong Hình 2-47, thì $\alpha_i = 90$ độ (hoặc $\alpha_i = -90$ độ), $\theta_i = 0, a_i = 0$, và d_i là chỉ tham số biến thiên. Lưu ý rằng x_i phải vuông góc với mặt phẳng của z_{i-1} và z_i, và có thể xảy ra trường hợp $a_i \neq 0$.



Hình 2-47 Khâu vuông góc $P \vdash R(90)$.

Vì vậy, ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$ cho một khớp với $\alpha_i = 90$ độ và các khớp $P \vdash R$ hoặc $P \vdash P$, được biết đến với tên gọi $P \vdash R(90)$ hoặc $P \vdash R(90)$, là

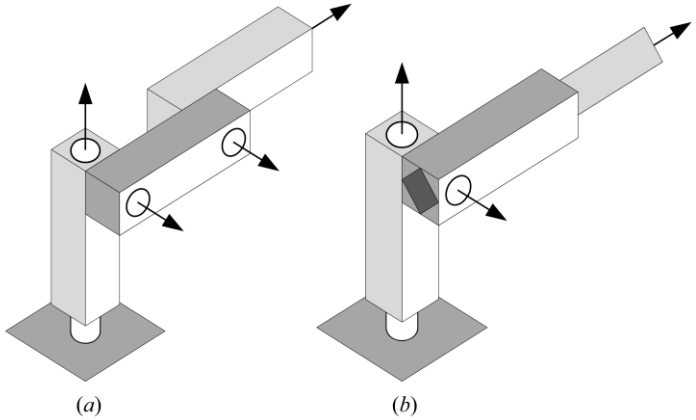
$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-356} $$

Trong trường hợp của một khâu với góc $\alpha_i = -90$ độ và các khớp $P \vdash R$ hoặc $P \vdash P$ được biết đến như là $P \vdash R(-90)$ hoặc $P \vdash P(-90)$ là:

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-357} $$

Ví dụ 2-82: Lắp ráp các khâu để tạo thành một tay máy công nghiệp.

Các tay máy công nghiệp thường được tạo ra bằng cách kết nối các khâu lại với nhau. Một tay máy là sự kết hợp của ba khâu cung cấp ba bậc tự do cho một điểm trong không gian Descartes. Các cánh tay có khớp nối và khớp cầu là hai loại tay máy phổ biến và thực tế. Hình 2-48(a) và (b) mô tả cách tạo ra các tay máy này bằng cách kết nối các khâu phù hợp.



Hình 2-48 Cánh tay robot khớp nối và khớp cầu là hai loại cánh tay phổ biến và thực tế trong kỹ thuật robot.

Ví dụ 2-83: Phân loại các khâu của robot công nghiệp.

Một khâu của robot được xác định bởi các khớp ở cả hai đầu, xác định ma trận biến đổi để đi từ hệ tọa độ khớp cụ thể ở B_i đến hệ tọa độ khớp gần đó ở B_{i-1}. Có 12 loại liên kết để tạo thành một robot công nghiệp. Ma trận biến đổi cho mỗi loại phụ thuộc hoàn toàn vào khớp gần đó và góc giữa các trục z. 12 loại ma trận biến đổi là:

1	$R \parallel R(0)$	hoặc	$R \parallel P(0)$
2	$R \parallel R(180)$	hoặc	$R \parallel P(180)$
3	$R \perp R(90)$	hoặc	$R \perp P(90)$
4	$R \perp R(-90)$	hoặc	$R \perp P(-90)$
5	$R \vdash R(90)$	hoặc	$R \vdash P(90)$
6	$R \vdash R(-90)$	hoặc	$R \vdash P(-90)$
7	$P \parallel R(0)$	hoặc	$P \parallel P(0)$
8	$P \parallel R(180)$	hoặc	$P \parallel P(180)$
9	$P \perp R(90)$	hoặc	$P \perp P(90)$
10	$P \perp R(-90)$	hoặc	$P \perp P(-90)$
11	$P \vdash R(90)$	hoặc	$P \vdash P(90)$
12	$P \vdash R(-90)$	hoặc	$P \vdash P(-90)$

Ví dụ 2-84: Biến đổi tọa độ DH dựa trên phép cộng vector.

Phép biến đổi DH từ một khung tọa độ sang khung tọa độ khác cũng có thể được mô tả bằng cách thêm vector. Tọa độ của một điểm P trong khung B_1, như được thể hiện trong Hình

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_2P} + \overrightarrow{O_1O_2} \tag{2-358}$$

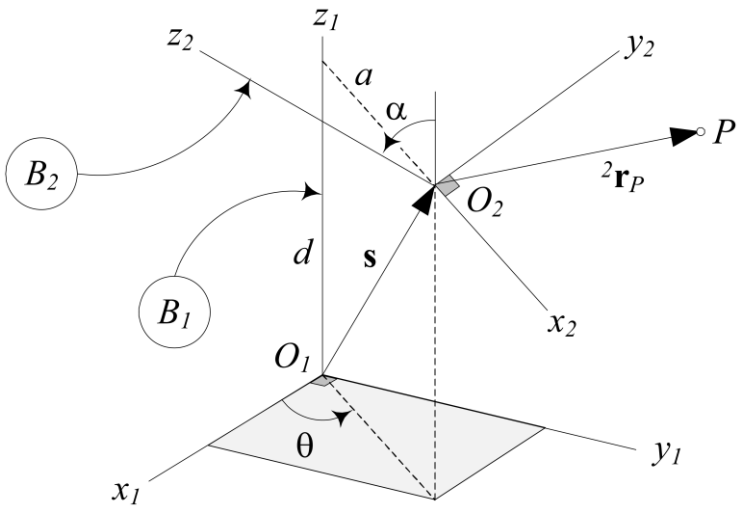
2-49, được xác định bằng phương trình vector

Trong đó

$$^{B_1}\overrightarrow{O_1O_2} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]^T \tag{2-359}$$

$$^{B_1}\overrightarrow{O_1P} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T \tag{2-360}$$

$$^{B_2}\overrightarrow{O_2P} = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T. \tag{2-361}$$



Hình 2-49 Phương pháp thay thế để suy ra biến đổi tọa độ Denavit-Hartenberg.

Tuy nhiên, chúng phải được biểu diễn trong cùng một hệ tọa độ, sử dụng các cosin của góc giữa các trục của hai hệ tọa độ.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 cos(x_2, x_1) + y_2 cos(y_2, x_1) + z_2 cos(z_2, x_1) + s_1 \\ y_1 &= x_2 cos(x_2, y_1) + y_2 cos(y_2, y_1) + z_2 cos(z_2, y_1) + s_2 \\ z_1 &= x_2 cos(x_2, z_1) + y_2 cos(y_2, z_1) + z_2 cos(z_2, z_1) + s_3 \\ 1 &= x_2(0) + y_2(0) + z_2(0) + 1 \end{aligned} \tag{2-362}$$

Biến đổi (2-362) có thể được sắp xếp lại để được mô tả bằng phép biến đổi ma trận đồng nhất.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(x_2, x_1) & cos(y_2, x_1) & cos(z_2, x_1) & s_1 \\ cos(x_2, y_1) & cos(y_2, y_1) & cos(z_2, y_1) & s_2 \\ cos(x_2, z_1) & cos(y_2, z_1) & cos(z_2, z_1) & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-363}$$

Trong Hình 2-49, trục x_2 đã được chọn sao cho nó nằm dọc theo đường vuông góc chung ngắn nhất giữa các trục z_1 và z_2. Trục y_2 hoàn thành một bộ trục tọa độ theo quy tắc bàn tay phải. Các tham số khác được định nghĩa như sau:

1. a là khoảng cách giữa các trục z_1 và z_0.
2. α là góc xoắn mà vít trục z_1 vào trục z_2 theo chiều dài a.
3. d là khoảng cách từ trục x_1 đến trục x_2.
4. θ là góc xoay mà vít trục x_1 vào trục x_2 theo đường d.

Sử dụng những định nghĩa này, ma trận biến đổi đồng nhất trở thành,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta cos\alpha & -sin\theta sin\alpha & acos\theta \\ sin\theta & cos\theta cos\alpha & cos\theta sin\alpha & asin\theta \\ 0 & -sin\,\alpha & cos\,\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-364}$$

Hoặc

$${}^1\boldsymbol{r}_P = {}^1T_2\, {}^2\boldsymbol{r}_P \tag{2-365}$$

Trong đó

$$^{1}T_2 = (a, \alpha, d, \theta) \tag{2-366}$$

Các tham số a, α, θ, d xác định cấu hình của B_2 so với B_1 và thuộc về B_2. Do đó, nói chung, các tham số $a_i, \alpha_i, \theta_i, d_i$ xác định cấu hình của B_i so với B_{i-1} và thuộc về B_i.

$$^{i-1}T_i = (a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i) \tag{2-367}$$

Ví dụ 2-85: Ma trận biến đổi DH giống nhau.

Vì trong phương pháp DH của việc đặt khung tọa độ, một phép dịch chuyển D và một phép quay R được thực hiện xung quanh và dọc theo một trục, nên không quan trọng nếu chúng ta áp dụng phép dịch chuyển D trước và sau đó là phép quay R hoặc ngược lại. Do đó, chúng ta có thể thay đổi thứ tự của D và R xung quanh và dọc theo cùng một trục và thu được cùng ma trận biến đổi DH Phương trình (2-338). Do đó,

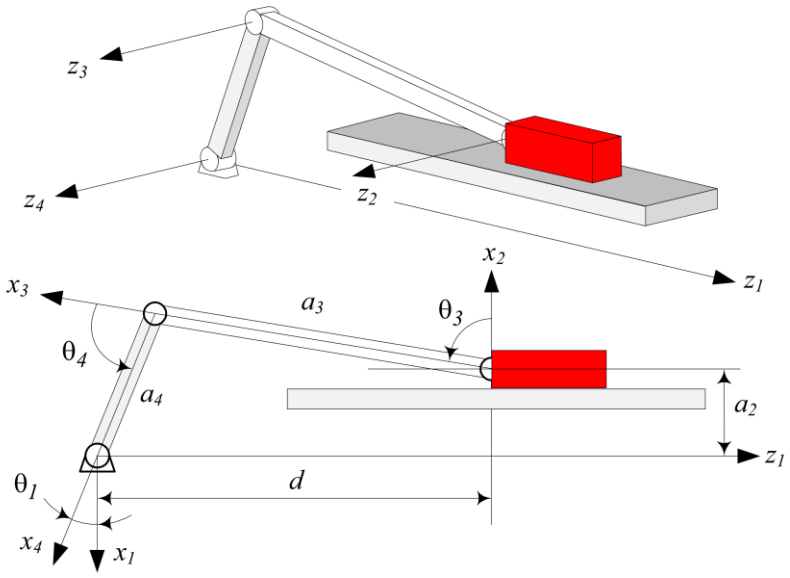
$$\begin{aligned} ^{i-1}T_i &= D_{z_i,d_i} R_{z_i,\theta_i} D_{x_i,a_i} R_{x_i,\alpha_i} \\ &= R_{z_i,\theta_i} D_{z_i,d_i} D_{x_i,a_i} R_{x_i,\alpha_i} \\ &= D_{z_i,d_i} R_{z_i,\theta_i} R_{x_i,\alpha_i} D_{x_i,a_i} \\ &= R_{z_i,\theta_i} D_{z_i,d_i} R_{x_i,\alpha_i} D_{x_i,a_i} \end{aligned} \tag{2-368}$$

Ví dụ 2-86: Ứng dụng DH cho một khớp liên kết trượt-quay trên mặt phẳng.

Đối với một robot hoặc cơ cấu vòng đóng, cũng sẽ có một kết nối giữa các liên kết đầu và cuối. Do đó, quy ước DH sẽ không được thỏa mãn bởi kết nối này. Hình 2-50 mô tả một cơ cấu tay quay - con trượt phẳng $R \perp P \vdash R \parallel R \parallel R$ và các hệ trục tọa độ DH được lắp đặt trên mỗi khâu.

Áp dụng biến đổi vòng lặp dẫn đến

$$[T] = {}^{1}T_2 \, {}^{2}T_3 \, {}^{3}T_4 \, {}^{4}T_1 = \boldsymbol{I}_4 \tag{2-369}$$



Hình 2-50 Cơ cấu tay quay - con trượt phẳng, tạo thành một vòng lặp đóng hoặc cơ chế song song.

Bảng 2-7 Bảng DH liên kết tay quay - con trượt như trên Hình 2-50.

Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_2	-90°	d	180°
2	a_3	0	0	θ_3
3	a_4	0	0	θ_4
4	0	-90°	0	θ_1

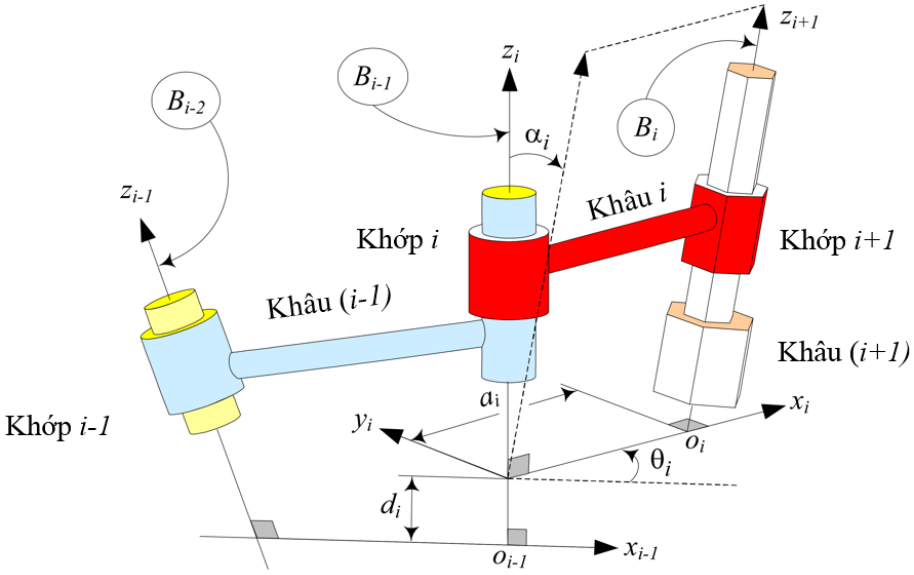
Trong đó, ma trận biến đổi $[T]$ chứa các phần tử là các hàm của $a_2, d, a_3, \theta_3, a_4, \theta_4$,và θ_1. Các tham số a_2, a_3, và a_4 là hằng số trong khi d, θ_3, θ_4 và θ_1 là biến. Giả sử θ_1 là đầu vào và được xác định, chúng ta có thể giải cho các biến không xác định khác như θ_3, θ_4 và d bằng cách làm cho các phần tử tương ứng của $[T]$ và I bằng nhau.

Ví dụ 2-87: Phương pháp Denavit-Hartenberg phi tiêu chuẩn.

Phương pháp Denavit-Hartenberg được trình bày trong phần này là phương pháp DH tiêu chuẩn. Tuy nhiên, chúng ta có thể áp dụng một bộ tham số DH khác, chỉ cần đặt khung tọa độ khâu B_i tại khớp gần nhất i thay vì khớp xa nhất $i+1$ như được thể hiện trong Hình 2-51. Trục z_i nằm dọc theo trục của khớp i và trục x_i nằm dọc theo pháp tuyến chung của các trục z_i và z_{i+1}, hướng từ trục z_i đến trục z_{i+1}. Trục y_i tạo thành một hệ tọa độ phải về bên phải cho khung tọa độ B_i.

Thông số hóa của sự dịch chuyển của các khung tọa độ này là:

1. a_i là khoảng cách giữa các trục z_i và z_{i+1} dọc theo trục x_i.
2. α_i là góc từ trục z_i đến trục z_{i+1} xoay quanh trục x_i.
3. d_i là khoảng cách giữa các trục x_{i-1} và x_i dọc theo trục z_i.
4. θ_i là góc giữa các trục x_{i-1} và x_i quanh trục z_i.



Hình 2-51 Định nghĩa phi tiêu chuẩn của các tham số $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$ cho khớp i và khâu (i) [1].

Ma trận biến đổi từ B_{i-1} đến B_i sử dụng phương pháp DH phi tiêu chuẩn, bao gồm hai phép quay và hai phép dịch chuyển xoay và dọc theo các trục tọa độ cục bộ của B_{i-1}. Quay α_{i-1} quanh x_{i-1}. Dịch chuyển tịnh tiến a_{i-1} theo hướng x_{i-1}. 3- Dịch chuyển tịnh tiến d_i theo hướng z_{i-1}. Quay θ_i quanh z_{i-1}.

$$
\begin{aligned}
{}^{i}T_{i-1} &= R_{z_{i-1},\theta_i} D_{z_{i-1},-d_i} D_{x_{i-1},a_{i-1}} R_{x_{i-1},-\alpha_{i-1}} \\
&= \begin{bmatrix} cos\theta_i & sin\theta_i cos\alpha_{i-1} & sin\theta_i sin\alpha_{i-1} & -a_{i-1}cos\theta_i \\ -sin\theta_i & cos\theta_i cos\alpha_{i-1} & cos\theta_i sin\alpha_{i-1} & a_{i-1}sin\theta_i \\ 0 & -sin\alpha_{i-1} & cos\alpha_{i-1} & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-370}
$$

Vì vậy, ma trận biến đổi từ B_i đến B_{i-1} cho phương pháp DH phi tiêu chuẩn là

$$
{}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ sin\theta_i cos\alpha_{i-1} & cos\theta_i cos\alpha_{i-1} & -sin\alpha_{i-1} & -d_i sin\alpha_{i-1} \\ sin\theta_i sin\alpha_{i-1} & cos\theta_i sin\alpha_{i-1} & cos\alpha_{i-1} & d_i cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-371}
$$

Một ưu điểm của phương pháp DH phi tiêu chuẩn là việc quay θ_i xung quanh trục z_i và số khớp tương đương với số tọa độ. Lực hoạt động, được thực hiện tại khớp i, cũng nằm ở cùng một vị trí với hệ tọa độ B_i. Xác định các đặc tính hình học của khớp, như trọng tâm, cũng đơn giản hơn trong hệ thống này.

Một nhược điểm của phương pháp DH phi tiêu chuẩn là ma trận biến đổi là sự kết hợp của các chỉ số $i-1$ và i.

Việc áp dụng ký hiệu tiêu chuẩn hoặc phi tiêu chuẩn là một sở thích cá nhân, bởi vì cả hai đều có thể được áp dụng một cách hiệu quả.

2.5.3. Động học vị trí thuận của robot

Động học thuận là quá trình chuyển đổi thông tin động học từ không gian biến số của các khớp robot sang không gian tọa độ Descartes. Tìm vị trí và hướng của khâu chấp hành cuối cho một bộ biến số khớp nhất định là vấn đề chính trong động học thuận. Vấn đề này có thể được giải quyết bằng cách xác định các ma trận biến đổi ${}^{0}T_i$ để mô tả thông tin động học của khớp (i) trong hệ tọa độ gốc của khớp. Cách truyền thống để tạo ra các phương trình động học thuận cho các cánh tay robot là tiến hành từng khâu một cách tuần tự bằng cách sử dụng các ký hiệu và hệ trục Denavit-Hartenberg. Do đó, động học thuận chủ yếu là việc xử lý các ma trận biến đổi.

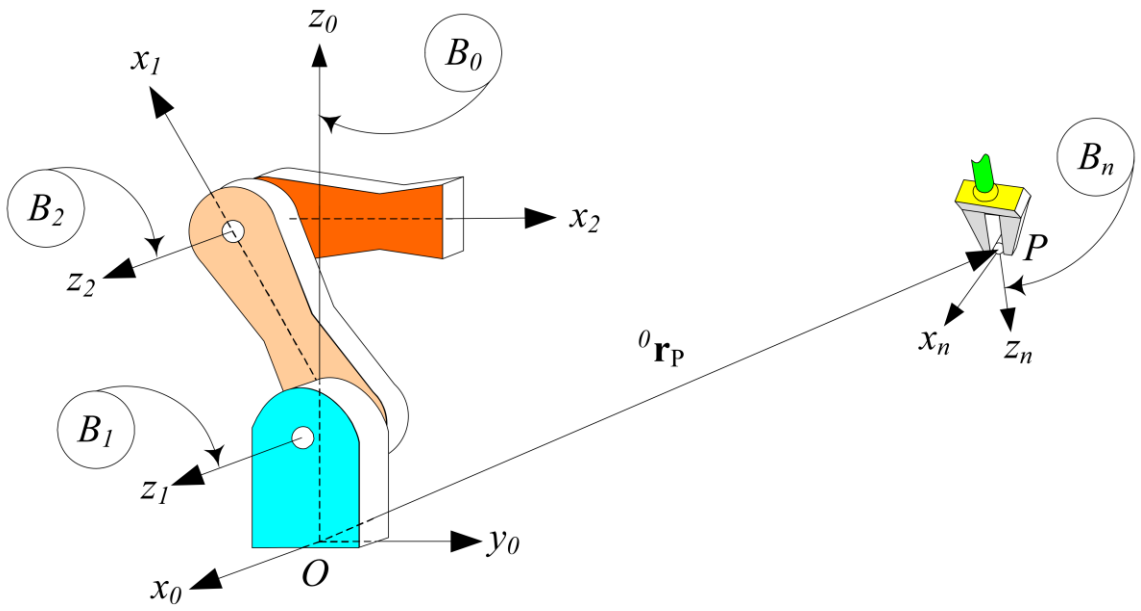
Đối với một robot có sáu bậc tự do (DOF), cần sáu ma trận biến đổi DH, một cho mỗi khớp, để biến đổi các tọa độ cuối đến các tọa độ cơ sở của khâu đế. Khung tọa độ cuối thường được đặt ở trung tâm của bàn kẹp như được hiển thị trong Hình 2-52. Đối với một bộ biến số khớp nhất định, các ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$ được xác định duy nhất. Do đó, vị trí và hướng của khâu chấp hành cuối cũng là một hàm duy nhất của các biến số khớp.

Thông tin về động học bao gồm: vị trí, vận tốc, gia tốc và sự thay đổi của gia tốc theo thời gian. Tuy nhiên, động học thuận thường chỉ đề cập đến phân tích vị trí. Vì vậy, động học thuận vị trí tương đương với việc xác định ma trận biến đổi kết hợp.

$$^{0}T_n = {}^{0}T_1(q_1)\,{}^{1}T_2(q_2)\,{}^{2}T_3(q_3)\,{}^{3}T_4(q_4)\cdots {}^{n-1}T_n(q_n) \tag{2-372}$$

Để tìm tọa độ của một điểm P trong hệ tọa độ cơ sở của khâu đế, khi các tọa độ của nó được cho trong khung tọa độ cuối.

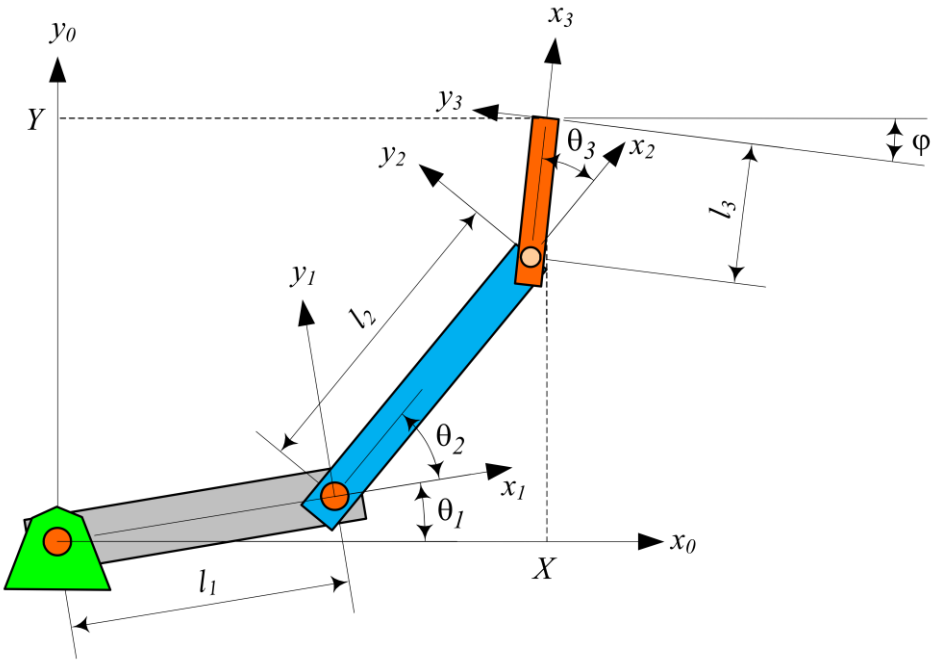
$$^{0}\boldsymbol{r}_P = {}^{0}T_n\,{}^{n}\boldsymbol{r}_P \tag{2-373}$$



Hình 2-52 Vị trí của khung tọa độ cuối trong khung toạ độ cơ sở của khâu đế.

Ví dụ 2-88: Động học thuận cho cánh tay robot phẳng 3R.

Hình 2-53 minh họa một cánh tay robot phẳng $R \parallel R \parallel R$. Sử dụng các tham số DH được chỉ ra trong Ví dụ 2-69 và áp dụng Phương trình (2-338), chúng ta có thể tìm các ma trận biến đổi $^{i-1}T_i$ cho $i = 3,2,1$. Cũng có thể sử dụng ma trận biến đổi (2-346) của Ví dụ 2-76, vì các khâu (1) và (2) đều là $R \parallel R(0)$.



Hình 2-53 Cánh tay robot phẳng.

$$ {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 & l_3cos\theta_3 \\ sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0 & l_3sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}374) $$

$$ {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}375) $$

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & l_1sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}376) $$

Vì vậy, ma trận biến đổi để liên kết khung tọa độ khâu chấp hành cuối với khung tọa độ cơ sở của khâu đế là:

$$ \begin{aligned} {}^{0}T_{3} &= {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3} \\ &= \begin{bmatrix} cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & r_{14} \\ sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ r_{14} &= l_1cos\theta_1 + l_2cos(\theta_1+\theta_2) + l_3cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ r_{24} &= l_1sin\theta_1 + l_2sin(\theta_1+\theta_2) + l_3sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \end{aligned} \quad (2\text{-}377) $$

Vị trí gốc của khung tọa độ B_3, là điểm tác động cuối của robot, là ở:

$$ {}^{0}T_{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) + l_3c(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ l_1s\theta_1 + l_2s(\theta_1+\theta_2) + l_3s(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}378) $$

Điều này có nghĩa là chúng ta có thể tìm được tọa độ của điểm tác động cuối trong khung tọa độ Descartes cơ sở nếu chúng ta có hình học của robot và tất cả các biến của các khớp.

$$ X = l_1cos\theta_1 + l_2cos(\theta_1+\theta_2) + l_3cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad (2\text{-}379) $$

$$ Y = l_1sin\theta_1 + l_2sin(\theta_1+\theta_2) + l_3sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad (2\text{-}380) $$

Vị trí nghỉ của cánh tay robot nằm trên trục x_0 khi $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0$ vì, ${}^{0}T_{3}$ trở thành:

$$ {}^{0}T_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1+l_2+l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}381) $$

Có ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_{i}$ là đủ để xác định cấu hình của mỗi khâu trong khung tọa độ của các khâu khác. Cấu hình của khâu (2) trong (0) là:

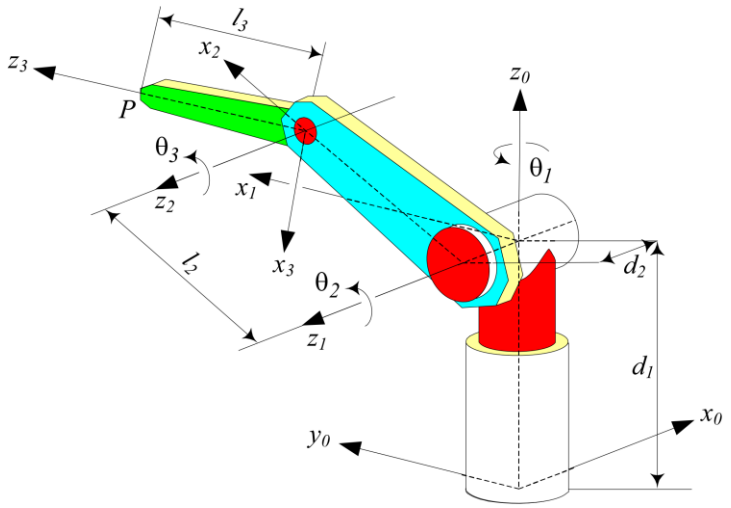
$$ \begin{aligned} {}^{0}T_{2} &= {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2} \\ &= \begin{bmatrix} cos(\theta_1+\theta_2) & -sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & f_{14} \\ sin(\theta_1+\theta_2) & cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & f_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ f_{14} &= l_1cos\theta_1 + l_2cos(\theta_1+\theta_2) \\ f_{24} &= l_1sin\theta_1 + l_2sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned} \quad (2\text{-}382) $$

Và cấu hình của khâu (3) trong (1) là:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}T_3 &= {}^{1}T_2\,{}^{2}T_3 \\
&= \begin{bmatrix} cos(\theta_2+\theta_3) & -sin(\theta_2+\theta_3) & 0 & g_{14} \\ sin(\theta_2+\theta_3) & cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
g_{14} &= l_3 cos(\theta_2+\theta_3) + l_2 cos\theta_2 \\
g_{24} &= l_3 sin(\theta_2+\theta_3) + l_2 sin\theta_2
\end{aligned}
\tag{2-383}
$$

Ví dụ 2-89: Động học thuận cho cánh tay robot dạng khớp nối $R \vdash R \parallel R$.

Xem xét một cánh tay robot $R \vdash R \parallel R$ như được minh họa theo dạng sơ đồ trong Hình 2-54. Để phát triển động học thuận của robot, bảng tham số DH của robot ở vị trí nghỉ được thiết lập như trong Bảng 2-8. Vị trí nghỉ của robot có thể được đặt ở bất kỳ cấu hình nào mà các trục nối z_1, z_2, z_3 là mặt phẳng chung, tuy nhiên hai vị trí thường được sử dụng nhiều nhất. Vị trí đầu tiên là khi x_1 là mặt phẳng chung với z_1, z_2, z_3 và vị trí thứ hai là khi x_0 là mặt phẳng chung với z_1, z_2, z_3.



Hình 2-54 Cánh tay robot dạng khớp nối $R \vdash R \parallel R$.

Xác định loại kết hợp các khớp liên kết như được hiển thị trong Bảng 2-9.

Bảng 2-8 Bảng tham số DH để thiết lập các khung tọa độ khâu.

Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-90°$	d_1	θ_1
2	l_2	0	d_2	θ_2
3	0	$90°$	l_3	θ_3

Bảng 2-9 Phân loại liên kết để thiết lập các khung liên kết.

Khâu	Loại
1	$R \vdash R(-90)$

2	$R \parallel R(0)$
3	$R \vdash R(90)$

Vì vậy, các ma trận biến đổi liên tiếp có các biểu thức sau đây:

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}384) $$

$$ {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2 cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}385) $$

$$ {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 0 \\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}386) $$

Để biểu diễn sự biến đổi hoàn toàn

$$ {}^{0}T_{3} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3} \quad (2\text{-}387) $$

Chúng ta cần tìm kết quả của một phép nhân ma trận. Do đó,

$$ {}^{0}T_{3} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}388) $$

Trong đó,

$$ \begin{aligned} r_{11} &= cos\,\theta_1\, cos(\theta_2 + \theta_3) \\ r_{21} &= sin\,\theta_1\, cos(\theta_2 + \theta_3) \\ r_{31} &= -\,sin(\theta_2 + \theta_3) \\ r_{12} &= -\,sin\,\theta_1 \\ r_{22} &= cos\,\theta_1 \\ r_{32} &= 0 \\ r_{13} &= cos\,\theta_1\, sin(\theta_2 + \theta_3) \\ r_{23} &= sin\,\theta_1\, sin(\theta_2 + \theta_3) \\ r_{33} &= cos(\theta_2 + \theta_3) \\ r_{14} &= l_2 cos\theta_1 cos\theta_2 - d_2 sin\theta_1 \\ r_{24} &= l_2 cos\theta_2 sin\theta_1 + d_2 cos\theta_1 \\ r_{34} &= d_1 - l_2\, sin\,\theta_2 \end{aligned} \quad (2\text{-}389) $$

Điểm tác động cuối P của khâu thứ ba ở vị trí $[0 \quad 0 \quad l_3]^T$ trong B_3. Vì vậy, vị trí của nó trong khung tọa độ cơ sở sẽ là:

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{r}_P &= {}^0T_3\,{}^3\boldsymbol{r}_P = {}^0T_3\begin{bmatrix}0\\0\\l_3\\1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-d_2 s\theta_1 + l_2 c\theta_1 c\theta_2 + l_3 c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3)\\ d_2 c\theta_1 + l_2 c\theta_2 s\theta_1 + l_3 s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3)\\ d_1 - l_2 s\theta_2 + l_3 c(\theta_2+\theta_3)\\ 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-390}
$$

Ma trận biến đổi ở vị trí nghỉ, khi $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0$, là:

$$
{}^0T_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & l_2\\ 0 & 1 & 0 & d_2\\ 0 & 0 & 1 & d_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2-391}
$$

Thiết lập này của các khung tọa độ cho thấy rằng ở vị trí nghỉ, x_1, x_2, x_3 là song song và nằm trên một đường thẳng với x_0, hơn nữa z_2, z_3 cũng song song, và z_1 và z_2 cũng song song.

Ví dụ 2-90: Động học cho cánh tay robot dạng khớp nối

Xem xét cánh tay $R \vdash R \parallel R$ trong Hình 2-54 với các kích thước sau đây.

$$
\begin{aligned}
l_2 &= 0.75\ m \quad & l_3 &= 0.65\ m\\
d_1 &= 0.48\ m \quad & d_2 &= 0.174\ m
\end{aligned}
\tag{2-392}
$$

Sử dụng sự kết hợp của các khâu - khớp như trong Bảng 2-9, chúng ta có:

$$
{}^0T_1 = \begin{bmatrix}cos\theta_1 & 0 & -sin\theta_1 & 0\\ sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0.48\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2-393}
$$

$$
{}^1T_2 = \begin{bmatrix}cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & 0.75cos\theta_2\\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & 0.75sin\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & 0.174\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2-394}
$$

$$
{}^2T_3 = \begin{bmatrix}cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 0\\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2-395}
$$

Vì vậy, ma trận biến đổi từ B_3 sang B_0 là:

$$
\begin{aligned}
{}^0T_3 &= {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\\
&= \begin{bmatrix}c\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & -s\theta_1 & c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & r_{11}\\ s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & c\theta_1 & s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & r_{12}\\ -s(\theta_2+\theta_3) & 0 & c(\theta_2+\theta_3) & r_{13}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
r_{11} &= 0.75\cos\theta_1\cos\theta_2 - 0.174\sin\theta_1\\
r_{12} &= 0.174\cos\theta_1 + 0.75\cos\theta_2\sin\theta_1\\
r_{13} &= 0.48 - 0.75\sin\theta_2
\end{aligned}
\tag{2-396}
$$

Điểm tác động cuối P của khâu thứ ba đang ở tại:

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{r}_P &= {}^0T_3\,{}^3\boldsymbol{r}_P = {}^0T_3\begin{bmatrix}0\\0\\0.65\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_1\\r_1\\r_1\\1\end{bmatrix} \\
r_1 &= 0.75cos\theta_1 cos\theta_2 - 0.174sin\theta_1 + 0.65cos\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\
r_2 &= 0.174cos\theta_1 + 0.75cos\theta_2 sin\theta_1 + 0.65sin\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\
r_3 &= 0.65cos(\theta_2+\theta_3) - 0.75sin\theta_2 + 0.48
\end{aligned}
\tag{2-397}
$$

Tại vị trí nghỉ của robot, khi $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0$ chúng ta có:

$$
{}^0T_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.75\\0 & 1 & 0 & 0.174\\0 & 0 & 1 & 0.48\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2-398}
$$

Ma trận này xác định điểm tác động cuối ở:

$$
{}^0\boldsymbol{r}_P = {}^0T_3\,{}^3\boldsymbol{r}_P = {}^0T_3\begin{bmatrix}0\\0\\0.65\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.75\\0.174\\1.13\\1\end{bmatrix} \tag{2-399}
$$

Ví dụ 2-91: Không gian làm việc.

Xem xét cánh tay $R \vdash R \parallel R$ trong Hình 2-54 với các kích thước sau đây.

$$
\begin{aligned}
l_2 &= 0.75\ m \quad l_3 = 0.65\ m \\
d_1 &= 0.48\ m \quad d_2 = 0.174\ m
\end{aligned}
\tag{2-400}
$$

Ma trận biến đổi khâu được đưa ra trong (2-393)-(2-395). Ma trận biến đổi của cánh tay robot ${}^0T_3$ ở vị trí nghỉ là (2-398) khi điểm P nằm ở (2-399).

Giả sử mỗi khớp có thể xoay 360 độ. Theo lý thuyết, điểm P phải có khả năng đạt được bất kỳ điểm nào trong không gian hình cầu S_1.

$$
\left(\boldsymbol{r} - {}^0\boldsymbol{d}_1 - d_2\,{}^0\hat{k}_1\right)^2 = (l_2+l_3)^2 \tag{2-401}
$$

$$
x^2 + (y-0.174)^2 + (z-0.48)^2 = 1.96 \tag{2-402}
$$

$$
{}^0\boldsymbol{d}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\d_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0.48\end{bmatrix} \tag{2-403}
$$

$$
\begin{aligned}
d_2\,{}^0\hat{k}_1 &= {}^0R_1 d_2\,{}^1\hat{k}_1 \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0.174\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0.174\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-404}
$$

Và ngoài không gian hình cầu S_2.

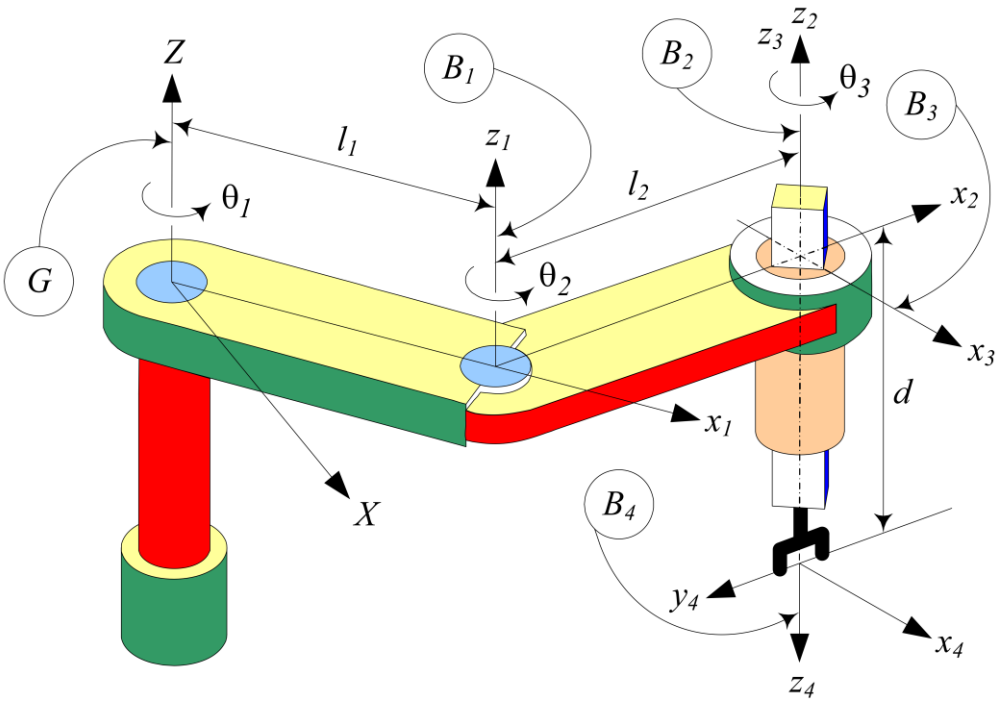
$$
\left(\boldsymbol{r} - {}^0\boldsymbol{d}_1 - d_2\,{}^0\hat{k}_1\right)^2 = (l_2-l_3)^2 \tag{2-405}
$$

$$x^2 + (y - 0.174)^2 + (z - 0.48)^2 \quad = 0.01 \qquad (2\text{-}406)$$

Không gian có thể đạt được giữa S_1 và S_2 được gọi là không gian làm việc của cánh tay máy.

Ví dụ 2-92: Động học thuận robot SCARA.

Xem xét robot $R \parallel R \parallel R \parallel P$ được hiển thị trong Hình 2-55. Động học thuận của robot có thể được giải quyết bằng cách nhận các ma trận biến đổi ${}^{i-1}T_i$. Khâu đầu tiên là một khâu $R \parallel R(0)$, có ma trận biến đổi như sau:



Hình 2-55 Robot SCARA $R \parallel R \parallel R \parallel P$.

$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1 cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & l_1 sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}407)$$

Khâu thứ hai cũng là một liên kết $R \parallel R(0)$.

$$ {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2 cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}408)$$

Khâu thứ ba là một $R \parallel R(0)$ có độ dài bằng không.

$$ {}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 & 0 \\ sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}409)$$

Và cuối cùng, khâu thứ tư là một $R \parallel P(0)$

$$ {}^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-410} $$

Vì vậy, cấu hình của khâu chấp hành cuối trong hệ tọa độ cơ sở là

$$ \begin{aligned} {}^0T_4 &= {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4 \\ &= \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -s(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & c(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-411} $$

Tại vị trí nghỉ của robot, khi $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = d = 0$ chúng ta có:

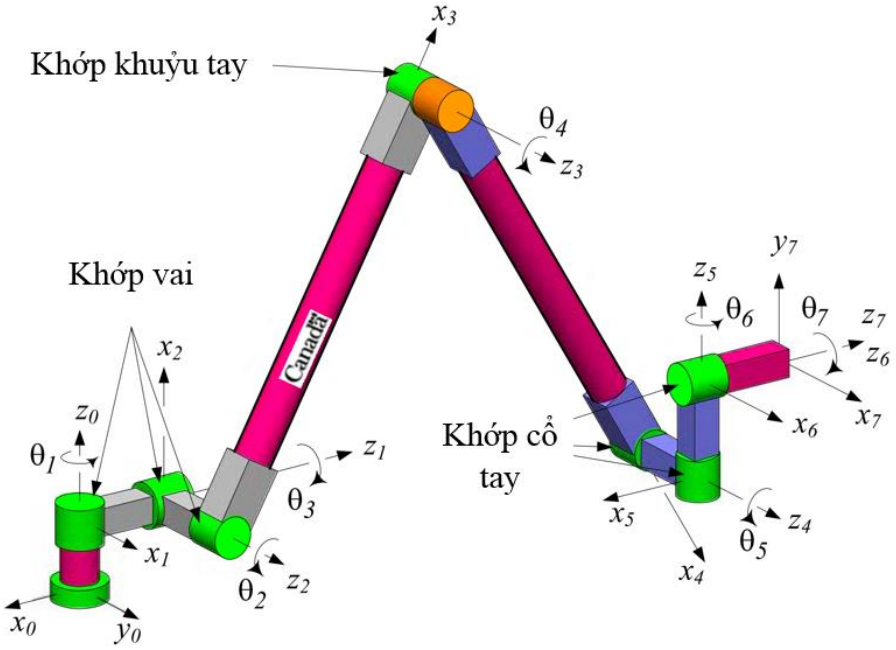
$$ {}^0T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 + l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-412} $$

Ví dụ 2-93: Hệ thống cánh tay robot điều khiển từ xa trên trạm vũ trụ (SSRMS).

Hệ thống cánh tay robot điều khiển từ xa của tàu vũ trụ (SRMS), còn được biết đến là (SSRMS), là một cánh tay và một bàn tay gắn vào Tàu vũ trụ hoặc trạm vũ trụ. Nó được sử dụng cho mục đích như: triển khai vệ tinh, xây dựng trạm vũ trụ, vận chuyển thành viên phi hành đoàn ở cuối cánh tay, khảo sát và kiểm tra bên ngoài trạm bằng máy ảnh.

Một mô hình đơn giản của SRMS, được minh họa trong Hình 2-56, có các đặc điểm được chỉ ra trong Bảng 2-10.

Xem xét các giá trị số của độ lệch khớp và độ dài các khâu như được trình bày trong Bảng 2-11. Sử dụng những giá trị này và chỉ rõ loại của mỗi khâu cho phép chúng ta xác định ma trận biến đổi cần thiết để giải quyết vấn đề động học thuận.



Hình 2-56 Minh họa về hệ thống cánh tay robot điều khiển từ xa của trạm không gian [1].

Khâu (1) và (2) là $R \vdash R(-90)$, và do đó,

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}413) $$

$$ {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & 0 & -sin\theta_2 & 0 \\ sin\theta_2 & 0 & cos\theta_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}414) $$

***Bảng 2-10 Đặc điểm của cánh tay robot trên trạm vũ trụ** [1].*

Chiều dài	14.22 m
Đường kính	38.1 cm
Trọng lượng	1336 kg
Số khớp	7
Khả năng vận hành	116000 kg(trong không gian)
Vận tốc lớn nhất của khâu chấp hành cuối	Không tải : 37 cm/s
	Đủ tải : 1.2 cm/s
Tốc độ quay lớn nhất	Xấp xỉ 4°/s

***Bảng 2-11 Thông số DH cho cánh tay robot SRMS** [1].*

Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	−90°	380 mm	θ_1
2	0	−90°	1360 mm	θ_2
3	7110 mm	0	570 mm	θ_3
4	7110 mm	0	475 mm	θ_4
5	0	90°	570 mm	θ_5
6	0	−90°	635 mm	θ_6
7	0	0	d_7	0

Khâu (3) và (4) là $R \parallel R(0)$, và do đó

$$ {}^{3}T_{4} = \begin{bmatrix} cos\theta_4 & -sin\theta_4 & 0 & a_4 cos\theta_4 \\ sin\theta_4 & cos\theta_4 & 0 & a_4 sin\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}415) $$

Khâu (5) là $R \vdash R(90)$, và khâu (6) là $R \vdash R(-90)$, do đó

$$ {}^{4}T_{5} = \begin{bmatrix} cos\theta_5 & 0 & sin\theta_5 & 0 \\ sin\theta_5 & 0 & -cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}416) $$

$$ {}^{5}T_{6} = \begin{bmatrix} cos\theta_6 & 0 & -sin\theta_6 & 0 \\ sin\theta_6 & 0 & cos\theta_6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}417) $$

Cuối cùng, khâu (7) là $R \vdash R(0)$ và hệ tọa độ gắn với khâu chấp hành cuối (end-effector) có dịch chuyển d_7 liên quan đến hệ tọa độ B_6.

$$ {}^{6}T_{7} = \begin{bmatrix} cos\theta_7 & -sin\theta_7 & 0 & 0 \\ sin\theta_7 & cos\theta_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}418) $$

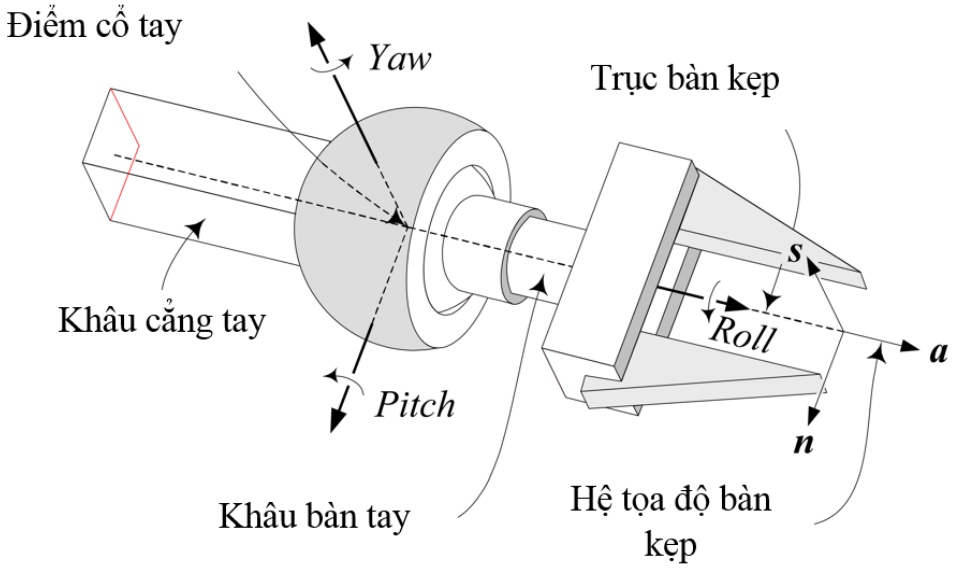
Động học thuận của SSRMS có thể được xác định bằng cách nhân trực tiếp ${}^{i-1}T_{i}, (i = 1,2,\cdots,7)$.

$$ {}^{0}T_{7} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\,{}^{3}T_{4}\,{}^{4}T_{5}\,{}^{5}T_{6}\,{}^{6}T_{7} \quad (2\text{-}419) $$

2.5.4. Khớp cổ tay cầu

Hình 2-57 minh họa một khớp cầu. Khớp cầu kết nối hai khâu: cánh tay và bàn tay. Trục của cánh tay và bàn tay được giả định là đồng phương tại vị trí ban đầu. Trục của bàn tay được gọi là trục của bàn kẹp. Một cổ tay cầu là sự kết hợp của các khớp và khâu để mô phỏng một khớp cầu và tạo ra ba bậc tự do xoay cho khâu bàn kẹp. Nó được tạo thành bởi ba khâu $R \vdash R$ có độ dài và lệch tâm bằng không, các trục khớp của chúng vuông góc và giao nhau tại một điểm gọi là điểm cổ tay. Điểm cổ tay là không đổi trong cấu trúc của robot và sẽ không di chuyển theo các tọa độ góc của cổ tay.

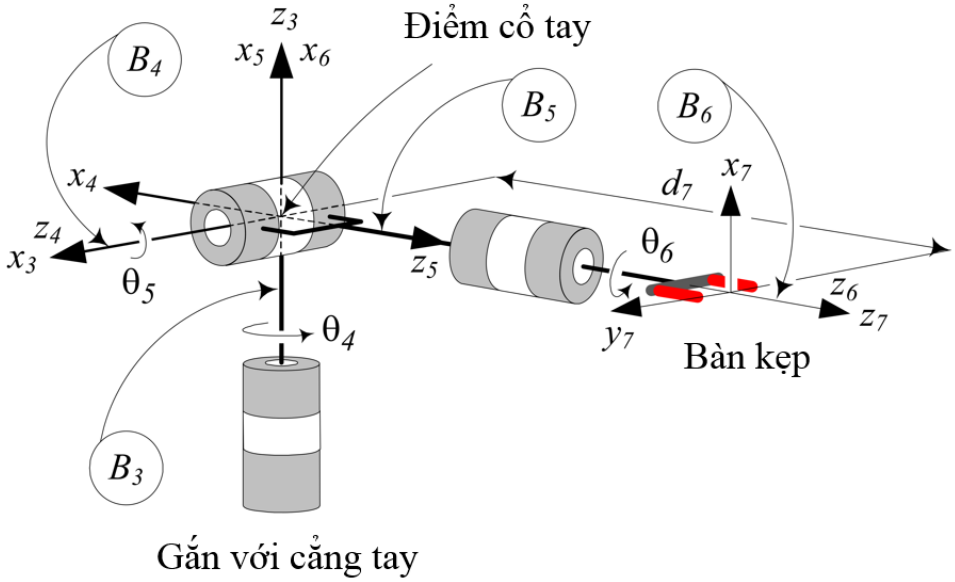
Tại điểm cổ tay, chúng ta xác định hai khung tọa độ. Khung đầu tiên là khung cố định của cổ tay, được gắn vào khớp cánh tay, và khung thứ hai là khung di động của cổ tay, được gắn vào khớp tay. Ngoài ra, còn có khung tọa độ công cụ hoặc bàn kẹp. Khung tọa độ công cụ của cổ tay được đánh dấu bằng ba vector, $\boldsymbol{a} \equiv \hat{k}, \boldsymbol{s} \equiv \hat{\imath}, \boldsymbol{n} \equiv \hat{\jmath}$. Nó được đặt tại một điểm đối xứng giữa các ngón tay của một bàn tay trống hoặc tại đỉnh của các công cụ cầm bằng ngón tay.



Hình 2-57 Khớp cầu tạo ra các chuyển động quay roll, pitch, yaw [1].

Hình 2-58 minh họa biểu đồ mô tả cấu hình khớp cổ tay cầu. Nó được tạo thành từ một khâu $\mathrm{R} \vdash \mathrm{R}(-90)$, được gắn vào một khâu $\mathrm{R} \vdash \mathrm{R}(90)$ khác, cuối cùng được gắn vào một khâu bàn kẹp quay $R \parallel R(0)$. Hệ tọa độ của bàn kẹp B_7 luôn song song với B_6 và được gắn ở một khoảng cách d_7 từ điểm cổ tay.

Để phân loại các khớp cổ tay cầu, chúng ta phân tách các chuyển động quay của một khớp cổ tay cầu thành ba chuyển động quay xoay quanh ba trục vuông góc nhau. Gọi các chuyển động quay này là Roll, Pitch và Yaw như được hiển thị trong Hình 2-57. Roll là bất kỳ chuyển động quay nào làm quay bàn kẹp xung quanh trục của nó khi cổ tay ở vị trí nghỉ. Trục bàn kẹp a xác định một mặt phẳng vuông góc $\mathbf{s} \times \mathbf{n}$ với trục được gọi là mặt phẳng gắp. Pitch và Yaw là các chuyển động quay xoay quanh hai trục vuông góc trong mặt phẳng bắt bàn kẹp ở điểm cổ tay. Các chuyển động quay Roll, Pitch và Yaw được xác định ở vị trí ban đầu của cổ tay.



Hình 2-58 Động học khớp cổ tay cầu [1].

Có ba loại khớp cổ tay cầu thực tế được phân loại trong Bảng 2-12.

Bảng 2-12 Phân loại khớp cổ tay cầu.

Loại	Thứ tự quay
1	Roll-Pitch-Roll
2	Roll-Pitch-Yaw
3	Pitch-Yaw-Roll

Hình 2-58 hiển thị một cổ tay khớp cầu với các góc Roll-Pitch-Roll và ma trận biến đổi sau đây.

$$
\begin{aligned}
{}^{3}T_{6} &= {}^{3}T_{4}\,{}^{4}T_{5}\,{}^{5}T_{6} \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & -c\theta_6s\theta_4 - c\theta_4c\theta_5s\theta_6 & c\theta_4s\theta_5 & 0 \\ c\theta_4s\theta_6 + c\theta_5c\theta_6s\theta_4 & c\theta_4c\theta_6 - c\theta_5s\theta_4s\theta_6 & s\theta_4s\theta_5 & 0 \\ -c\theta_6s\theta_5 & s\theta_5s\theta_6 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-420}
$$

Chứng minh: Một cổ tay sẽ được gắn vào khớp cuối cùng của một tay máy, thường là khâu (3). Tọa độ của khớp cuối cùng của tay máy nên được thiết lập tại điểm cổ tay để hoạt động như khâu cố định cho cơ cấu cổ tay. Nếu tay máy có ba khớp, thì khung tọa độ đầu tiên của cơ cấu cổ tay nên được đánh số là 3 và sẽ có cùng hướng với B_3 của tay máy. Sau đó trục z_3 sẽ chỉ theo hướng của khớp cổ tay đầu tiên. Trục z_3 sẽ theo hướng của cánh tay của tay máy khi cổ tay được hiển thị như trong Hình 2-58. Chọn $x_5 = z_4 \times z_5$ và $\alpha = -90$ độ vì khi $\theta_5 = 0$, chúng ta muốn tay trỏ thẳng lên từ cánh tay.

Sử dụng ma trận biến đổi (2-351) cho khớp (4), (2-350) cho khớp (5), R_{Z,θ_6} cho khớp (6), và D_{Z,d_6} cho khung B_7, chúng ta có các ma trận biến đổi sau:

$$
{}^{3}T_{4} = \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & -sin\theta_4 & 0 \\ sin\theta_4 & 0 & cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-421}
$$

$$
{}^{4}T_{5} = \begin{bmatrix} cos\theta_5 & 0 & sin\theta_5 & 0 \\ sin\theta_5 & 0 & -cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-422}
$$

$$
{}^{5}T_{6} = \begin{bmatrix} cos\theta_6 & -sin\theta_6 & 0 & 0 \\ sin\theta_6 & cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-423}
$$

$$
{}^{6}T_{7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-424}
$$

Ma trận ${}^3T_6 = {}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6$ xác định hướng của cổ tay trong hệ tọa độ của cánh tay B_3.

$$
\begin{aligned}
{}^3T_6 &= {}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6 \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & -c\theta_6s\theta_4 - c\theta_4c\theta_5s\theta_6 & c\theta_4s\theta_5 & 0 \\ c\theta_4s\theta_6 + c\theta_5c\theta_6s\theta_4 & c\theta_4c\theta_6 - c\theta_5s\theta_4s\theta_6 & s\theta_4s\theta_5 & 0 \\ -c\theta_6s\theta_5 & s\theta_5s\theta_6 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-425}
$$

Và ma trận biến đổi sau đây xác định cấu hình của khung tọa độ công cụ B_7 trong khung tọa độ của cánh tay dưới B_3.

$$
\begin{aligned}
{}^3T_7 &= {}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6\,{}^6T_7 \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & -c\theta_6s\theta_4 - c\theta_4c\theta_5s\theta_6 & c\theta_4s\theta_5 & d_7c\theta_4s\theta_5 \\ c\theta_4s\theta_6 + c\theta_5s\theta_6s\theta_4 & c\theta_4c\theta_6 - c\theta_5s\theta_4s\theta_6 & s\theta_4s\theta_5 & d_7s\theta_4s\theta_5 \\ -c\theta_6s\theta_5 & s\theta_5s\theta_6 & c\theta_5 & d_7c\theta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-426}
$$

Đồng thời cũng có thể xác định ${}^5T_6$ bao gồm chuyển động quay θ_6 và dịch chuyển d_7 bởi

$$
{}^5T_6 = \begin{bmatrix} cos\theta_6 & -sin\theta_6 & 0 & 0 \\ sin\theta_6 & cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-427}
$$

Việc sử dụng ma trận ${}^5T_6$ để giảm số lượng ma trận và do đó giảm số lượng tính toán số học.

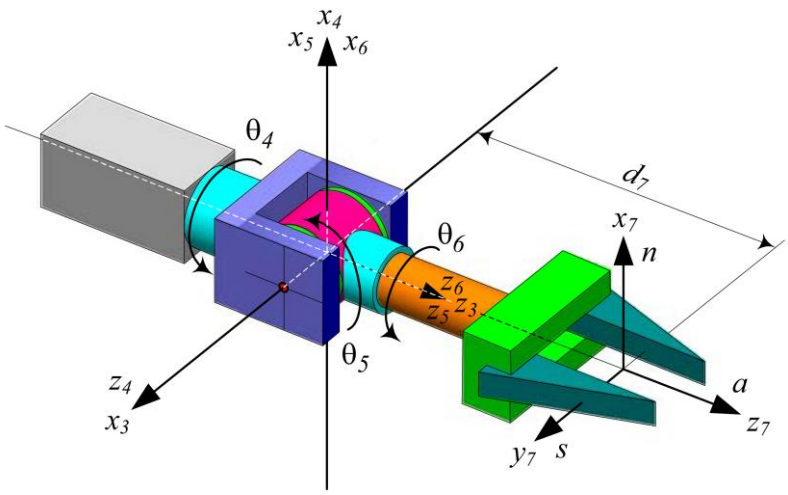
$$
{}^5T_6 = \begin{bmatrix} cos\theta_6 & -sin\theta_6 & 0 & 0 \\ sin\theta_6 & cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-428}
$$

Ma trận biến đổi ở vị trí nghỉ, trong đó $\theta_4 = 0, \theta_5 = 0, \theta_6 = 0$, là:

$$
{}^3T_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-429}
$$

Để chỉ ra rằng chỉ có ba loại khớp cổ tay cầu, ta bắt đầu với việc quay cổ tay đầu tiên, luôn luôn xoay quanh một trục cố định trên khâu cánh tay. Nó được gọi là Roll nếu trục khớp nằm dọc theo trục cánh tay. Trục này cũng sẽ nằm dọc theo trục bàn kẹp ở vị trí nghỉ. Nếu trục quay đầu tiên là vuông góc với trục cánh tay thì chúng ta coi việc quay đầu tiên là Pitch. Nếu chuyển động quay đầu tiên là Roll, thì chuyển động quay thứ hai là vuông góc với trục cánh tay và được gọi là Pitch. Có hai tình huống có thể xảy ra đối với chuyển động quay thứ ba. Nó được gọi là Roll, nếu nó xoay quanh trục bàn kẹp, và gọi là Yaw, nếu nó vuông góc với trục của hai chuyển động quay đầu tiên.

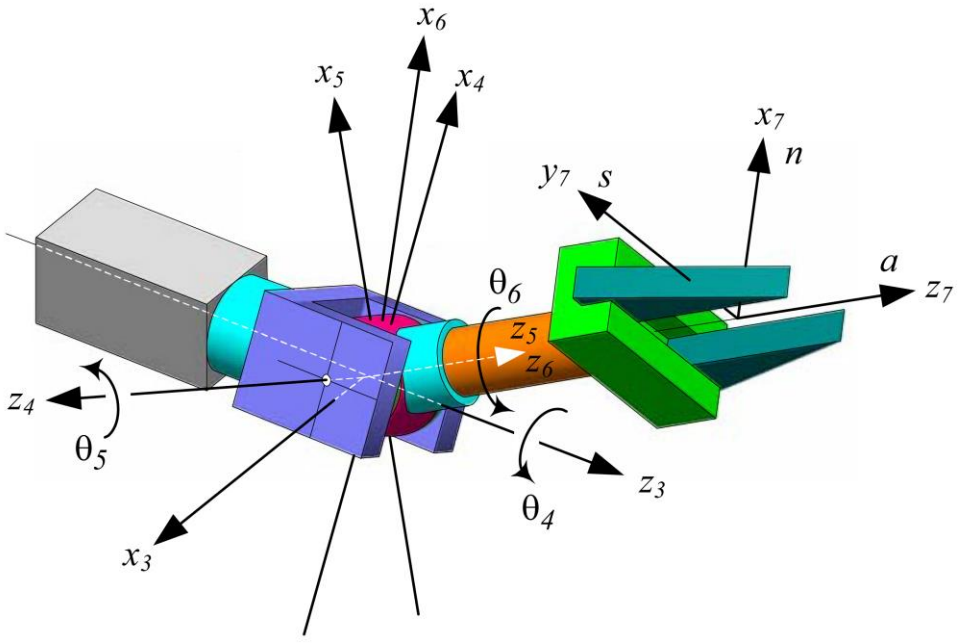
Hình 2-59 và Hình 2-60 minh họa một cổ tay Roll-Pitch-Roll ở vị trí ban đầu và đang chuyển động tương ứng. Loại cổ tay này cũng được gọi là cổ tay Euler vì Roll-Pitch-Roll tương ứng đến các trục quay $Z - x - z$.



Hình 2-59 Tay robot ở vị trí ban đầu [1].

Nếu chuyển động quay đầu tiên là Pitch, chuyển động quay thứ hai có thể là Roll hoặc Yaw. Nếu là Yaw, thì chuyển động quay thứ ba phải là Roll để có các chuyển động quay độc lập. Nếu là Roll, thì chuyển động quay thứ ba phải là Yaw. Pitch-Yaw-Roll và Pitch-Roll-Yaw không thể phân biệt được, và chúng ta có thể chọn Pitch-Yaw-Roll là cổ tay cầu hình cầu duy nhất có chuyển động quay đầu tiên là Pitch.

Thực tế, chúng ta tạo các chuyển động quay tròn Roll, Pitch và Yaw bằng cách tạo hai khâu và ba khung tọa độ giữa các khung tọa độ tĩnh và động. Các khâu sẽ được kết nối bằng ba khớp quay. Trục khớp giao nhau tại điểm cổ tay và vuông góc khi cổ tay ở vị trí nghỉ.

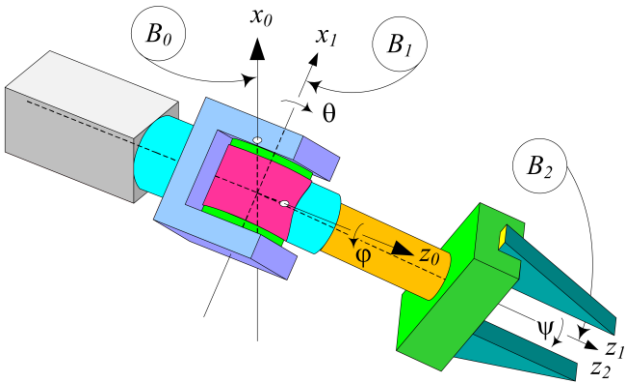


Hình 2-60 Tay robot đang chuyển động [1].

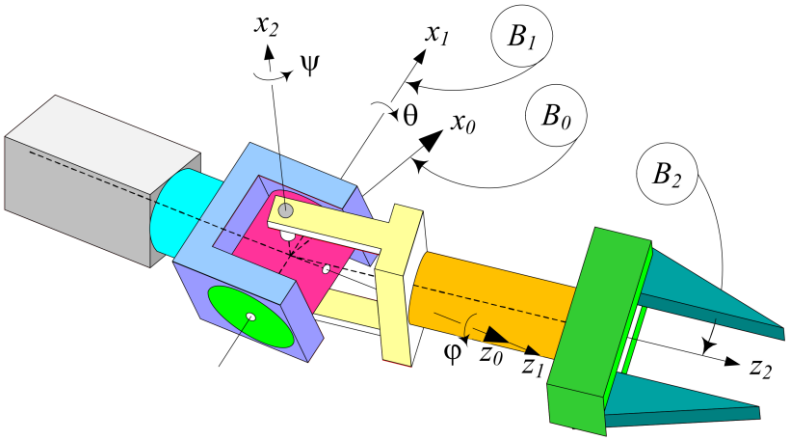
Nếu chuyển động quay đầu tiên là Pitch, chuyển động quay thứ hai có thể là Roll hoặc Yaw. Nếu là Yaw, thì chuyển động quay thứ ba phải là Roll để có các chuyển động quay độc lập. Nếu là Roll, thì chuyển động quay thứ ba phải là Yaw. Pitch-Yaw-Roll và Pitch-Roll-Yaw không thể phân biệt được, và chúng ta có thể chọn Pitch-Yaw-Roll là cổ tay cầu hình cầu duy nhất có chuyển động quay đầu tiên là Pitch.

Thực tế, chúng ta tạo các chuyển động quay tròn Roll, Pitch và Yaw bằng cách tạo hai khâu và ba khung tọa độ giữa các khung tọa độ tĩnh và động. Các khâu sẽ được kết nối bằng ba khớp quay. Trục khớp giao nhau tại điểm cổ tay và vuông góc khi cổ tay ở vị trí nghỉ.

Việc phân tích động học của khớp cổ tay cầu trở nên đơn giản hơn khi chúng ta xác định ba hệ tọa độ phi-DH tại điểm cổ tay và xác định các phép biến đổi tương đối của chúng. Hình 2-61 cho thấy một cổ tay Roll-Pitch-Roll với ba hệ tọa độ. Khung tọa độ đầu tiên vuông góc $B_0(x_0, y_0, z_0)$ được cố định vào cánh tay và hoạt động như một khung tọa độ tĩnh của cổ tay sao cho z_0 là trục của khớp của cánh tay và một khâu quay. Khâu quay là khâu cổ tay đầu tiên và khớp là khớp cổ tay đầu tiên. Hướng của các trục x_0 và y_0 là tùy ý. Khung tọa độ thứ hai $B_1(x_1, y_1, z_1)$ được xác định sao cho z_1 nằm dọc theo trục của tay nắm ở vị trí nghỉ và x_1 là trục của khớp thứ hai. B_1 luôn quay một góc φ quanh z_0 và θ quanh x_1 tương đối với B_0. Khung tọa độ thứ ba $B_2(x_2, y_2, z_2)$ là khung tọa độ động của cổ tay và được xác định sao cho z_2 luôn song song với trục của tay nắm. Nếu khớp thứ ba là một Roll, thì z_2 là trục của khớp, nếu không thì khớp thứ ba là Yaw và x_2 là trục của khớp. Do đó, B_2 luôn quay ψ quanh z_2 hoặc x_2, tương đối với B_1. Việc tạo các hệ tọa độ B_1 và B_2 giúp đơn giản hóa phân tích động học của khớp cổ tay cầu bằng cách không xem xét các liên kết nội bộ của cổ tay. Xem xét cách xác định và các phép quay của B_2 so với B_1, và B_1 so với B_0, chỉ có ba loại khớp cổ tay cầu thực tế như được phân loại trong Bảng 2-12. Ba khớp cổ tay này được hiển thị trong Hình 2-61-Hình 2-63.



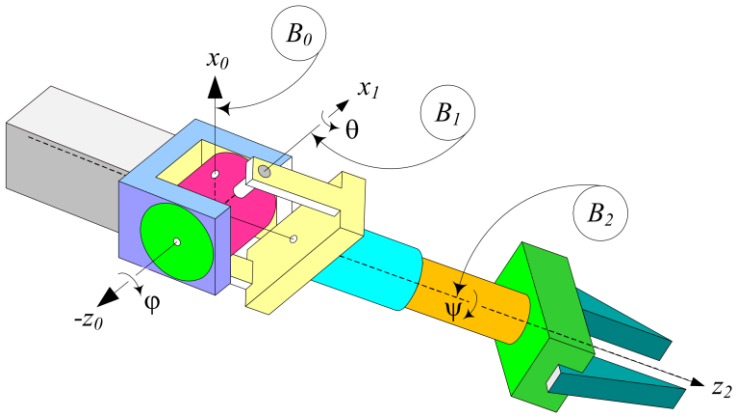
Hình 2-61 Khớp cổ tay cầu loại Roll-Pitch-Roll hoặc Euler.



Hình 2-62 Khớp cổ tay cầu loại Roll-Pitch-Yaw.

Ví dụ 2-94: Khung tọa độ DH và khớp cổ tay cầu.

Các Hình 2-59 và Hình 2-60 miêu tả một minh họa khác của khớp cổ tay cầu loại 1. Gốc chung của các khung B_4, B_5 và B_6 nằm tại điểm cổ tay. Khung tọa độ cuối, được gọi là khung tọa độ công cụ hoặc khung tọa độ kết thúc, được biểu thị bằng ba vector, a, s, n, và được đặt tại một điểm đối xứng giữa các ngón tay của một bàn tay trống hoặc ở đầu của các công cụ được cầm bởi bàn tay. Vector n được gọi là *tilt* và là vector pháp tuyến vuông góc với các ngón tay hoặc hàm kẹp. Vector s được gọi là *twist* và là vector trượt chỉ ra hướng mở của các ngón tay. Vector a được gọi là *turn* và là vector tiếp cận vuông góc với lòng bàn tay.



Hình 2-63 Khớp cổ tay cầu loại Pitch-Yaw-Roll.

Vị trí của các hệ tọa độ nội bộ được quy định trước bởi phương pháp DH, tuy nhiên, đối với khâu cuối, vị trí của hệ tọa độ công cụ B_n có phần tùy ý và không rõ ràng. Sự tùy ý này có thể được giải quyết thông qua các lựa chọn đơn giản hoặc bằng cách đặt ở một vị trí đặc biệt trong bàn kẹp. Với hệ tọa độ B_n sẽ dễ dàng hơn nếu z_n được đặt trùng với z_{n-1}. Lựa chọn này đặt $a_n = 0$ và $\alpha_n = 0$.

Ví dụ 2-95: Khớp cổ tay cầu loại Roll-Pitch-Roll hoặc Euler.

Hình 2-61 minh họa một khớp cổ tay cầu loại 1, Roll-Pitch-Yaw. B_0 là khung tọa độ tĩnh và B_2 là khung tọa độ chuyển động của nó. Ma trận biến đổi ${}^0R_1$ là một phép quay φ về trục z_0 tĩnh sau đó là một phép quay θ về trục x_1.

$$
\begin{aligned}
{}^0R_1 &= {}^1R_0^T = \left[R_{x_1,\theta} R_{z_0,\varphi}^T\right]^T = \left[R_{x,\theta} R_{Z,\varphi}^T\right]^T \\
&= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right]^T \\
&= \begin{bmatrix} cos\varphi & -cos\theta sin\varphi & sin\theta sin\varphi \\ sin\varphi & cos\theta cos\varphi & -cos\varphi sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}430)
$$

Ma trận biến đổi ${}^1R_2$ là một phép quay ψ xoay quanh trục cục bộ z_2.

$$
{}^1R_2 = {}^2R_1^T = R_{z_2,\psi}^T = R_{z,\psi}^T = \begin{bmatrix} cos\psi & -sin\psi & 0 \\ sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}431)
$$

Do đó, ma trận biến đổi giữa các khung tọa độ cổ tay động và khung tọa độ cổ tay tĩnh là:

$$\begin{aligned} {}^0R_2 &= {}^0R_1\,{}^1R_2 = \left[R_{x_1,\theta}R^T_{z_0,\varphi}\right]^T R^T_{z_2,\psi} = R_{z_0,\varphi}R^T_{x_1,\theta}R^T_{z_2,\psi} \\ &= R_{Z,\varphi}R^T_{x,\theta}R^T_{z,\psi} \\ &= \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - c\theta s\psi s\varphi & -c\varphi s\psi - c\theta c\psi s\varphi & s\theta s\varphi \\ c\psi s\varphi + c\theta c\varphi s\psi & c\theta c\psi c\varphi - s\psi s\varphi & -c\varphi s\theta \\ s\theta s\psi & c\psi s\theta & c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-432}$$

Ví dụ 2-96: Khớp cổ tay cầu loại Roll-Pitch-Yaw.

Hình 2-62 minh họa một khớp cổ tay cầu dạng 2, Roll-Pitch-Yaw. B_0 xác định hệ tọa độ tĩnh của cổ tay. Nhược điểm chính về động học của loại cổ tay cầu này là z_1 không cố định với bàn kẹp. Tuy nhiên, chúng ta gắn một hệ tọa độ B_2 vào bàn kẹp như là hệ tọa độ động của cổ tay sao cho z_2 trùng với trục của bàn kẹp, và x_2 là trục của khớp thứ ba. Phép biến đổi giữa B_2 và B_1 chỉ là một phép quay ψ quanh trục x_2.

$${}^1R_2 = R^T_{x_2,\psi} = R^T_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\psi & sin\psi \\ 0 & -sin\psi & cos\psi \end{bmatrix}^T \tag{2-433}$$

Để xác định ma trận biến đổi ${}^0R_1$, chúng ta quay B_1 trước φ độ quanh trục theo z_0, sau đó quay θ độ quanh trục x_1.

$$\begin{aligned} {}^0R_1 &= {}^1R_0^T = \left[R_{x_1,\theta}R^T_{z_0,\varphi}\right]^T = \left[R_{x,\theta}R^T_{Z,\varphi}\right]^T \\ &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^T \\ &= \begin{bmatrix} cos\varphi & -cos\theta sin\varphi & sin\theta sin\varphi \\ sin\varphi & cos\theta cos\varphi & -cos\varphi sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-434}$$

Vậy, ma trận biến đổi giữa các khung tọa độ cổ tay động và tĩnh là:

$$\begin{aligned} {}^0R_2 &= {}^0R_1\,{}^1R_2 = \left[R_{x_1,\theta}R^T_{z_0,\varphi}\right]^T R^T_{x_2,\psi} = R_{z_0,\varphi}R^T_{x_1,\theta}R^T_{x_2,\psi} \\ &= R_{Z,\varphi}R^T_{x,\theta}R^T_{x,\psi} \\ &= \begin{bmatrix} c\varphi & s\theta s\psi s\varphi - c\theta c\psi s\varphi & c\theta s\psi s\varphi + c\psi s\theta s\varphi \\ s\varphi & c\theta c\psi c\varphi - c\varphi s\theta s\psi & -c\theta c\varphi s\psi - c\psi c\varphi s\theta \\ 0 & c\theta s\psi + c\psi s\theta & c\theta c\psi - s\theta s\psi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-435}$$

Ví dụ 2-97: Khớp cổ tay cầu loại Pitch-Yaw- Roll.

Hình 2-63 minh họa một khớp cổ tay cầu dạng 3, Pitch-Yaw-Roll. B_0 xác định hệ tọa độ tĩnh của nó và B_2 xác định hệ tọa độ chuyển động của nó. Ma trận biến đổi ${}^1R_2$ là một phép quay ψ xoay quanh trục z_2 cục bộ.

$${}^1R_2 = {}^2R_1^T = R^T_{z_2,\psi} = R^T_{z,\psi} = \begin{bmatrix} cos\psi & -sin\psi & 0 \\ sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-436}$$

Để xác định ma trận biến đổi ${}^0R_1$, chúng ta quay trục B_1 một góc φ độ đầu tiên quanh trục z_0, sau đó quay θ độ quanh trục x_1.

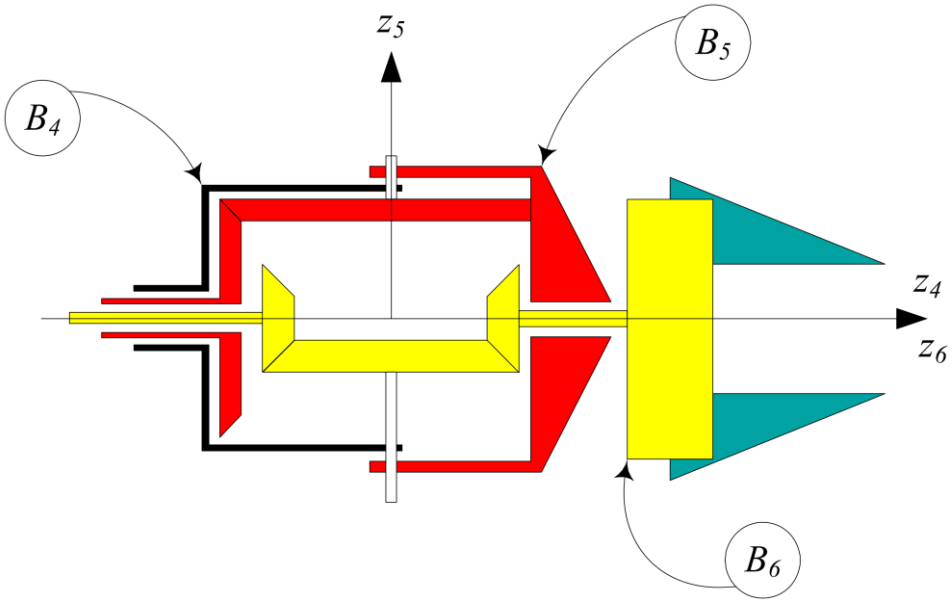
$$
\begin{aligned}
{}^0R_1 &= {}^1R_0^T = \left[R_{x_1,\theta}R_{z_0,\varphi}^T\right]^T = \left[R_{x,\theta}R_{Z,\varphi}^T\right]^T \\
&= \left[\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & s\theta\\ 0 & -s\theta & c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\varphi & -s\varphi & 0\\ s\varphi & c\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]^T \\
&= \begin{bmatrix}cos\varphi & -cos\theta sin\varphi & sin\theta sin\varphi\\ sin\varphi & cos\theta cos\varphi & -cos\varphi sin\theta\\ 0 & sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-437}
$$

Vì vậy, ma trận biến đổi giữa các khung tọa độ cổ tay động và tĩnh là:

$$
\begin{aligned}
{}^0R_2 &= {}^0R_1\,{}^1R_2 = \left[R_{x_1,\theta}R_{z_0,\varphi}^T\right]^T R_{z_2,\psi}^T = R_{z_0,\varphi}R_{x_1,\theta}^T R_{z_2,\psi}^T \\
&= R_{Z,\varphi}R_{x,\theta}^T R_{z,\psi}^T \\
&= \begin{bmatrix}c\psi c\varphi - c\theta s\psi s\varphi & -c\varphi s\psi - c\theta c\psi s\varphi & s\theta s\varphi\\ c\psi s\varphi + c\theta c\varphi s\psi & c\theta c\psi c\varphi - s\psi s\varphi & -c\varphi s\theta\\ s\theta s\psi & c\psi s\theta & c\theta\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-438}
$$

Ví dụ 2-98: Thiết kế thực tế của khớp cổ tay cầu.

Hình 2-64 minh họa một cổ tay cầu Euler thực tế. Ba phép quay Roll-Pitch-Roll được điều khiển bởi ba trục song song. Phép quay đầu tiên là Roll của B_4 quanh trục z_4. Phép quay thứ hai là Pitch của B_5 quanh trục z_5. Phép quay thứ ba là Roll của B_6 quanh trục z_6.

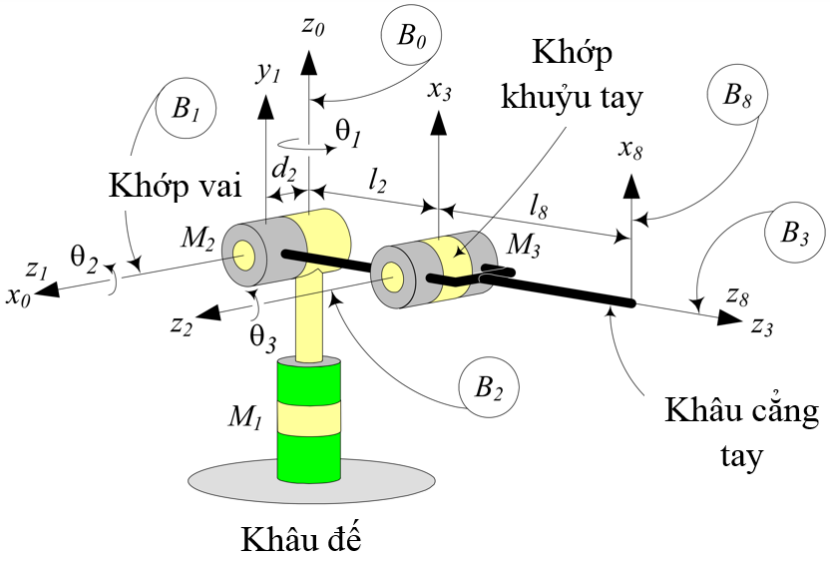


Hình 2-64 Khớp cổ tay cầu thực tế.

2.5.5. Động học lắp ráp

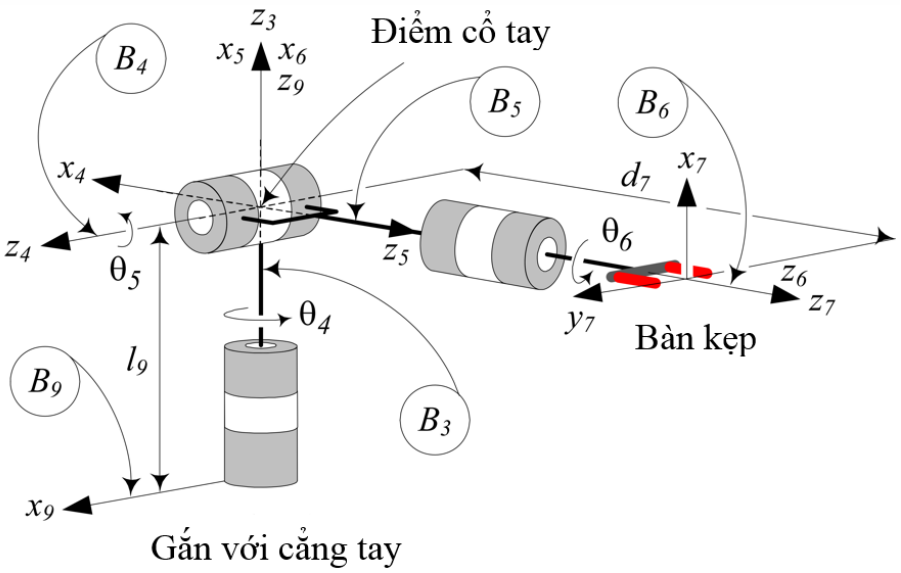
Đa số robot công nghiệp hiện đại có một cánh tay chính và một loạt các cổ tay có thể thay đổi. Cánh tay là một hệ đa khâu để tạo các đơn vị năng lượng chính và cung cấp chuyển động cho điểm cổ tay.

Hình 2-65 minh họa một ví dụ về một bộ cánh tay robot có ba DOF. Bộ manipulator này có thể quay so với khung toàn cục bằng một động cơ cơ sở tại M_1, và mang các động cơ khác tại M_2 và M_3.



Hình 2-65 Cánh tay khớp nối với ba bậc tự do (DOF) [1].

Cổ tay có thể thay đổi là các cấu trúc phức tạp, được thiết kế để tạo ra ba bậc tự do xoay quanh điểm cổ tay. Đế của cổ tay sẽ được gắn vào điểm đầu của cánh tay. Cổ tay, khâu chấp hành của robot cũng có thể được gọi là khấu chấp hành cuối, bàn kẹp, bàn tay, hoặc công cụ. Hình 2-66 minh họa một ví dụ về cổ tay khớp cầu được giả định sẽ được gắn vào cánh tay trên Hình 2-65.

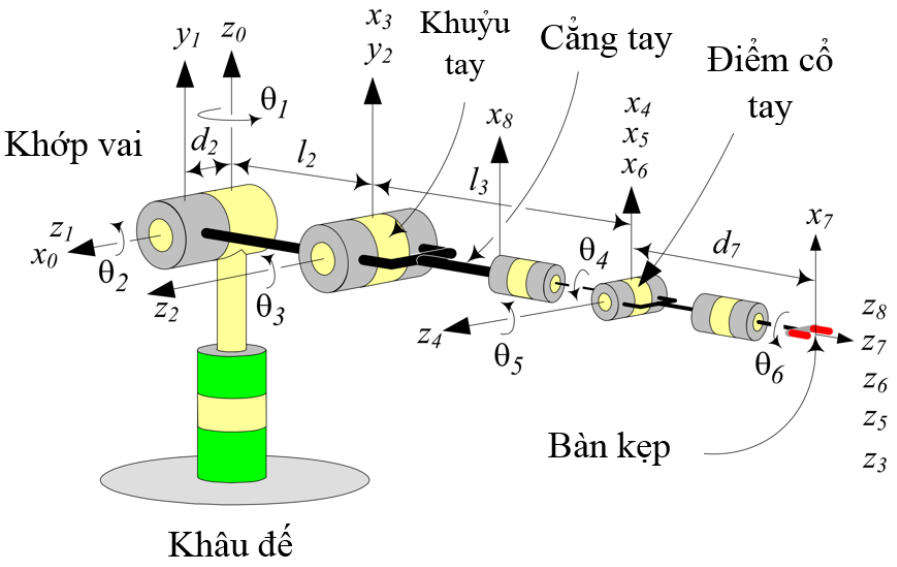


Hình 2-66 Cổ tay khớp cầu và động học của nó [1].

Để giải quyết vấn đề về động học của một cánh tay robot, chúng ta xem xét cánh tay máy và cổ tay như là các khối đa cơ học riêng biệt. Tuy nhiên, chúng ta gắn một hệ tọa độ tạm thời tại điểm tác động cuối của cánh tay máy, và một hệ tọa độ tạm thời khác tại điểm gốc của cổ tay. Hệ tọa độ tại điểm tác động cuối được gọi là khung *takht*, và hệ tọa độ tại gốc của cổ tay được gọi là khung *neshin*. Việc kết hợp các khung *neshin* và *takht* cùng nhau lắp ráp robot từ quan điểm động học. Việc kết hợp động học giữa cổ tay và cánh tay được gọi là lắp ráp.

Khung tọa độ B_8 trong Hình 2-65 là khung takht của cánh tay robot, và khung tọa độ B_9 trong Hình 2-66 là khung neshin của cổ tay. Trong quá trình lắp ráp, khung tọa độ neshin B_9 đặt

trên khung tọa độ takht B_8 sao cho z_8 trùng với z_9, và x_8 trùng với x_9. Robot khớp nối được lắp ráp từ cổ tay cầu và cánh tay robot được hiển thị trong Hình 2-67.

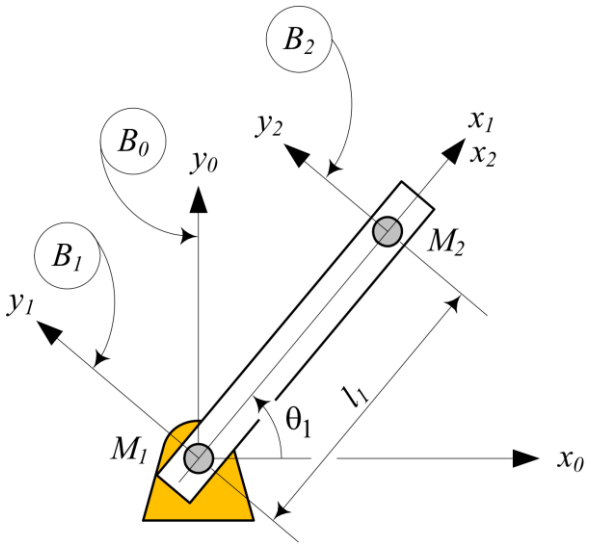


Hình 2-67 Robot khớp nối được tạo ra bằng cách lắp ráp một cổ tay cầu vào một cánh tay khớp nối [1].

Bộ khung đa khâu đã lắp ráp sẽ luôn có một số khung tọa độ bổ sung. Các khung tọa độ thêm này đòi hỏi các ma trận biến đổi bổ sung có thể tăng số lượng phép tính toán toán học cần thiết. Một đề xuất để loại bỏ khung tọa độ neshin và giữ khung takht tại điểm kết nối. Tuy nhiên, miễn là các ma trận biến đổi giữa các khung tọa độ đã được biết, việc có thêm khung tọa độ không phải là một bất lợi đáng kể. Trong Hình 2-67, chúng ta có thể bỏ qua B_8 và đi trực tiếp từ B_3 đến B_4 và thay thế l_8 và l_9 bằng $l_3 = l_8 + l_9$.

Từ "takht" có nghĩa là "ghế", và từ "neshin" có nghĩa là "ngồi", cả hai từ đều xuất phát từ tiếng Ba tư.

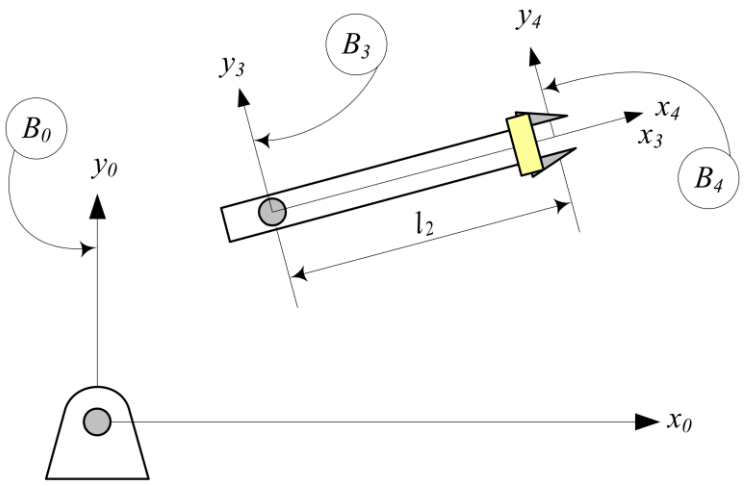
Ví dụ 2-99: Lắp ráp cánh tay Robot 2R phẳng.



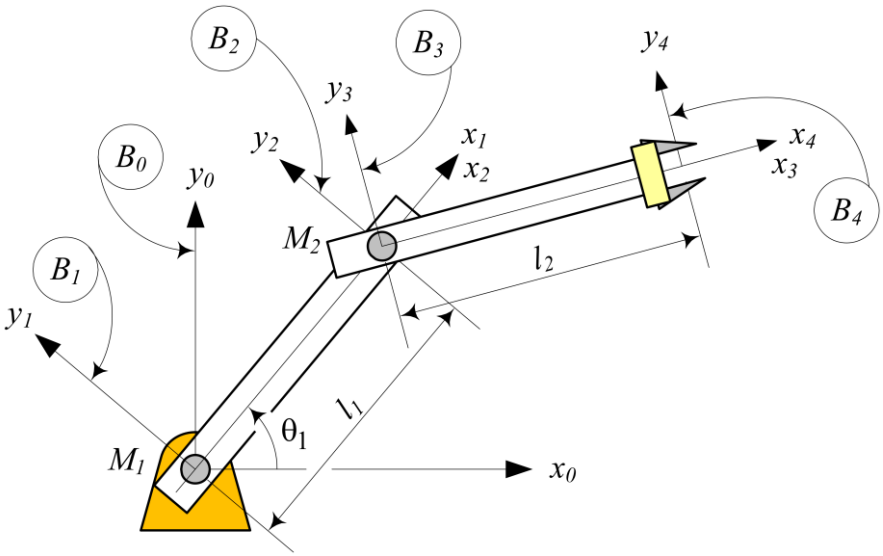
Hình 2-68 Cánh tay có một bậc tự do được sử dụng như cơ sở cho một cánh tay phẳng $R \parallel R$.

Trong Hình 2-68 minh họa một ví dụ về một cánh tay có một bậc tự do (DOF) làm cơ sở cho một canh tay robot phẳng $R \parallel R$. Cánh tay này có thể xoay so với hệ tọa độ toàn cục thông qua một động cơ tại M_1, và mang một động cơ khác tại M_2. Hình 2-69 minh họa một mẫu cổ tay phẳng được giả sử sẽ được gắn vào cánh tay trong Hình 2-68.

Khung tọa độ B_2 trong Hình 2-68 là khung tọa độ của cánh tay, và khung tọa độ B_3 trong Hình 2-69 là khung tọa độ của cổ tay. Robot $R \parallel R$ phẳng được tạo thành bằng cách lắp ráp cổ tay và cánh tay được thể hiện trong Hình 2-70.



Hình 2-69 Cổ tay phẳng.



Hình 2-70 Cánh tay robot $R \parallel R$ phẳng được tạo ra bằng cách lắp ráp cổ tay và cánh tay.

Ví dụ 2-100: Lắp ráp cơ cấu cổ tay vào cánh tay máy.

Xem xét một robot được tạo ra bằng cách gắn tay được hiển thị trong Hình 2-59, vào điểm tác động cuối của cánh tay dạng khớp nối trong Hình 2-54. Robot sẽ có sáu bậc tự do để đạt được bất kỳ điểm nào trong không gian làm việc ở một hướng mong muốn. Tính toán động học thuận của robot có thể được xác định bằng cách kết hợp ma trận biến đổi của cổ tay (2-420) và ma trận biến đổi của bộ điều khiển (2-388).

$$ {}^0T_7 = T_{\text{arm}}\, T_{\text{wrist}}\ {}^6T_7 = {}^0T_3\ {}^3T_6\ {}^6T_7 \tag{2-439} $$

Ma trận biến đổi cổ tay ${}^3T_7$ đã được đưa ra trong Phương trình (2-420), và ma trận biến đổi cánh tay ${}^0T_3$ đã được xác định trong Ví dụ 2-89. Tuy nhiên, vì chúng ta đang gắn cổ tay tại điểm P của khung B_3, ma trận biến đổi ${}^3T_4$ trong (2-421) phải bao gồm khoảng cách của khớp này. Vì vậy, chúng ta thay thế ma trận (2-421) bằng

$$ {}^3T_4 = \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & -sin\theta_4 & 0 \\ sin\theta_4 & 0 & cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-440} $$

để tìm

$$ \begin{aligned} T_{\text{wrist}} &= {}^3T_6 \\ &= \begin{bmatrix} -s\theta_4 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 & -c\theta_6 s\theta_4 - c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ c\theta_4 s\theta_6 + c\theta_5 c\theta_6 s\theta_4 & c\theta_4 c\theta_6 - c\theta_5 s\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ -c\theta_6 s\theta_5 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-441} $$

Vị trí nghỉ của robot có thể được kiểm tra để đảm bảo rằng

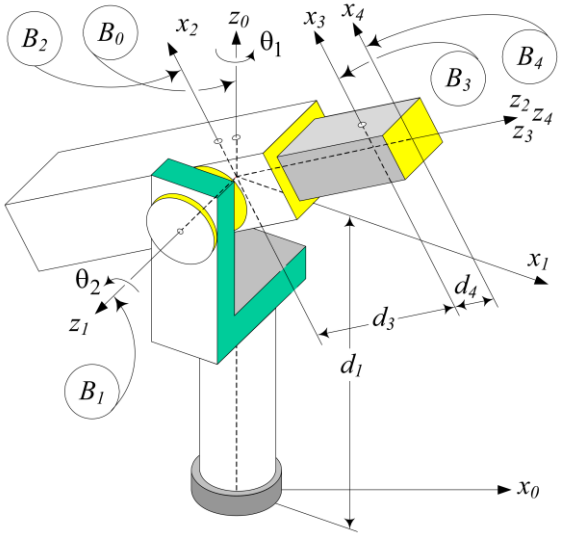
$$ {}^0T_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + l_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-442} $$

Vì

$$ {}^6T_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-443} $$

Ví dụ 2-101: Cánh tay robot với không gian làm việc hình cầu (cánh tay cầu).

Cánh tay robot với không gian làm việc hình cầu mô phỏng hệ tọa độ cầu để định vị một điểm trong không gian 3D. Hình 2-71 minh họa một cánh tay với không gian làm việc hình cầu. Hệ tọa độ B_0 là hệ toàn cục hoặc cơ sở của tay máy. Khâu (1) có thể xoay quanh z_0 và khâu (2) có thể xoay quanh z_1, nằm vuông góc với z_0. Hai phép quay này mô phỏng hai chuyển động góc của tọa độ cầu. Tọa độ bán kính được mô phỏng bằng khâu (3) có một khớp trượt với khâu (2). Cũng có một hệ tọa độ takht tại điểm tác động cuối của khâu (3), nơi có thể gắn cổ tay.



Hình 2-71 Cánh tay với không gian làm việc hình cầu.

Khâu (1) trong Hình 2-71 là một $R \vdash R(90)$, khâu (2) cũng là một $R \vdash P(90)$, và khâu (3) là một $P \parallel R(0)$, do đó,

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & -cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}444) $$

$$ {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & 0 & sin\theta_2 & 0 \\ sin\theta_2 & 0 & -cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}445) $$

$$ {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}446) $$

Ma trận biến đổi từ B_3 sang hệ tọa độ takht B_4 chỉ là một vector dịch chuyển d_4.

$$ {}^{3}T_{4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}447) $$

Ma trận biến đổi từ khung takht B_4 sang khung cơ sở B_0 là:

$$ \begin{aligned} {}^{0}T_{4} &= {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\,{}^{3}T_{4} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 & c\theta_1 s\theta_2 & (d_3+d_4)(c\theta_1 s\theta_2) \\ c\theta_2 s\theta_1 & -c\theta_1 & s\theta_1 s\theta_2 & (d_3+d_4)(s\theta_2 s\theta_1) \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & d_1 - d_3 c\theta_2 - d_4 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}448) $$

${}^{0}T_{4}$ ở vị trí nghỉ giảm xuống thành:

$$ {}^{0}T_{4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}449) $$

Thiết lập các khung tọa độ DH sao cho ma trận biến đổi tổng thể tại vị trí nghỉ trở thành ma trận đơn vị. Nếu chúng ta sắp xếp lại khung tọa độ của khâu (1) để làm cho nó trở thành $R \vdash R(-90)$ thì ${}^{0}T_{1}$ trở thành:

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}450) $$

Và ma trận biến đổi tổng quát tại vị trí nghỉ là một ma trận đơn vị.

Để biến khâu (1) thành $R \vdash R(-90)$, chúng ta có thể đảo ngược hướng của trục z_1 hoặc trục x_1. Hình 2-71 mô tả sự sắp xếp mới của các hệ tọa độ. Do đó, ma trận biến đổi từ hệ takht B_4 sang hệ cơ sở B_0 ở vị trí nghỉ giảm xuống:

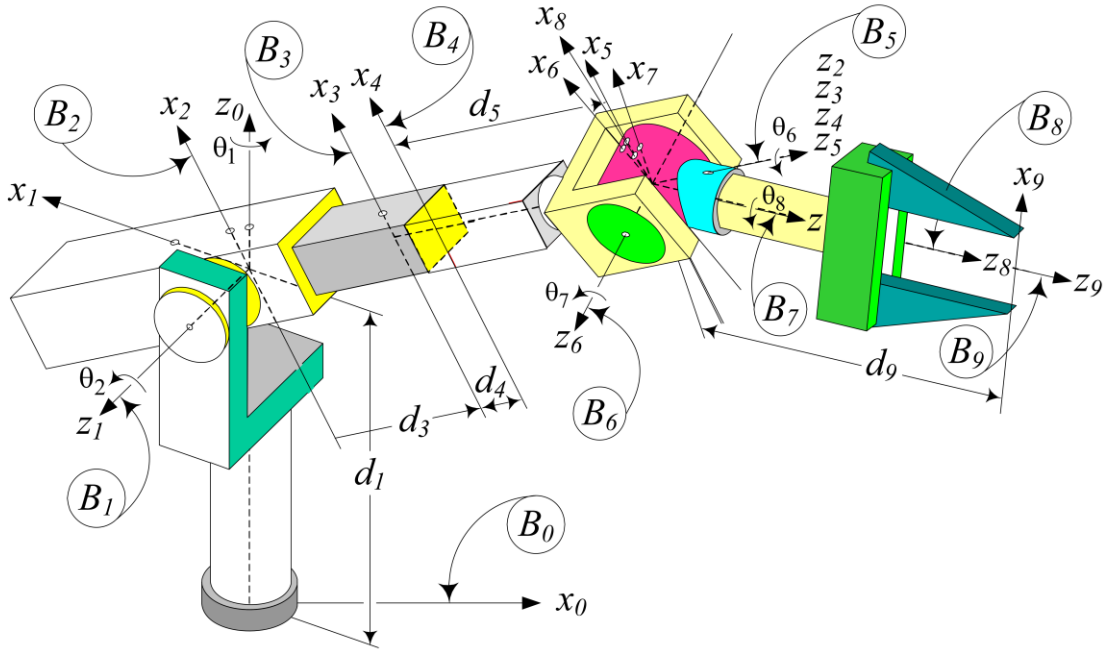
$$ {}^{0}T_{4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-451} $$

Ví dụ 2-102: Lắp ráp một cổ tay cầu vào một cánh tay cầu.

Để chuyển đổi cánh tay của Hình 2-71 thành một robot, chúng ta cần gắn thêm một bàn tay vào đó. Lắp ráp cổ tay cầu Euler trong Ví dụ 2-95 vào cánh tay cầu. Cổ tay, cánh tay và hệ tọa độ DH đi kèm của chúng được hiển thị trong các Hình 2-60 và Hình 2-71 tương ứng.

Lắp ráp một bàn tay vào một cánh tay là một phẫu thuật động học trong đó trong quá trình thực hiện, chúng ta gắn một hệ nhiều khâu vào một hệ khác. Trong ví dụ này, chúng ta gắn một bàn tay cầu vào một cánh tay cầu để tạo ra một robot cánh tay-bàn tay cầu.

Khung tọa độ takht B_4 của cánh tay máy và khung tọa độ neshin B_4 của cổ tay hoàn toàn giống nhau. Do đó, chúng ta có thể lắp ráp cánh tay máy và cổ tay bằng cách khớp hai khung này và tạo ra một robot cánh tay máy và cổ tay kết hợp như được hiển thị trong Hình 2-72. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, các khung tọa độ takht và neshin có thể có nhãn khác nhau và có một ma trận biến đổi hằng số giữa chúng.



Hình 2-72 Lắp ráp một cổ tay cầu vào một cánh tay cầu.

Động học thuận của robot cho khung công cụ B_9 có thể được xác định bằng phép nhân ma trận.

$$ {}^{0}T_{9} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\,{}^{3}T_{4}\,{}^{4}T_{5}\,{}^{5}T_{6}\,{}^{6}T_{7}\,{}^{7}T_{8}\,{}^{8}T_{9} \tag{2-452} $$

Ma trận ${}^{i-1}T_{i}$ được cung cấp trong các Ví dụ 2-95 và Ví dụ 2-101.

Chúng ta có thể loại bỏ các khung tọa độ B_3 và B_4 để giảm số lượng khung tổng cộng và đơn giản hóa các phép tính ma trận. Tuy nhiên, chúng ta có thể ưu tiên giữ chúng và đơn giản hóa quá trình lắp ráp khi thay đổi cổ tay bằng một cái mới. Nếu robot đã được lắp ráp này dự

kiến sẽ hoạt động trong một thời gian, chúng ta có thể loại bỏ và đơn giản hóa robot thành một trong Hình 2-44. Chúng ta nên thực hiện thay thế toán học cho các khung đã bị loại bỏ B_3 và B_4 bằng một ma trận biến đổi ${}^2T_5$.

$$ {}^2T_5 = {}^2T_3\ {}^3T_4\ {}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}453) $$

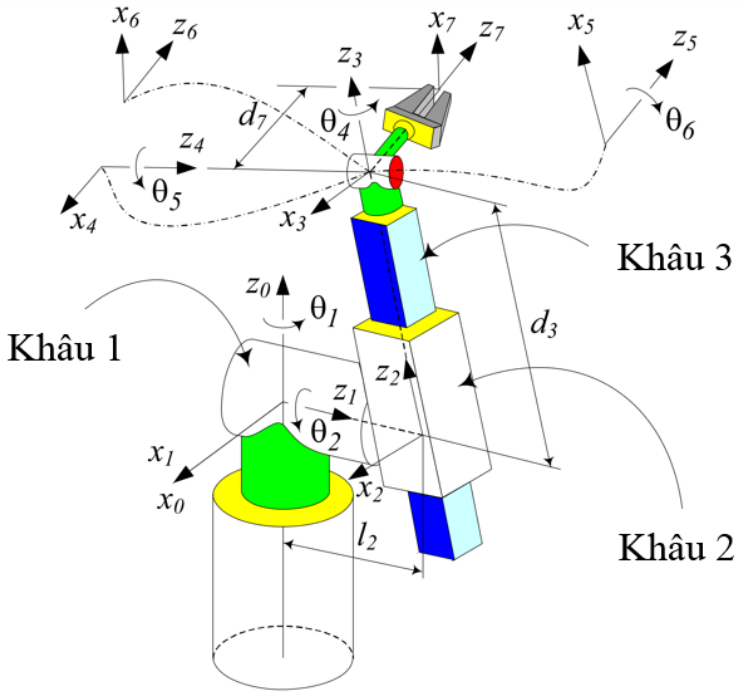
$$ d_6 = d_3 + d_4 + d_5 \quad (2\text{-}454) $$

Động học thuận của khung công cụ B_9 trở thành:

$$ {}^0T_9 = {}^0T_1\ {}^1T_2\ {}^2T_5\ {}^5T_6\ {}^6T_7\ {}^7T_8\ {}^8T_9 \quad (2\text{-}455) $$

Ví dụ 2-103: Động học thuận robot cầu.

Hình 2-73 mô tả một cánh tay robot cầu được gắn với một cổ tay cầu để tạo thành một robot $R \vdash R \vdash P$. Các tham số DH tương ứng được hiển thị trong Bảng 2-13.



Hình 2-73 Robot cầu được tạo ra bởi cánh tay cầu trang bị cổ tay cầu [1].

Bảng 2-13 Bảng tham số DH cho cánh tay Stanford.

Khung tọa độ	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-90°$	0	θ_1
2	0	$90°$	l_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

4	0	$-90°$	0	θ_4
5	0	$90°$	0	θ_5
6	0	0	0	θ_6

Tuy nhiên, áp dụng phân loại các khớp nối của các ví dụ từ Ví dụ 2-76 đến Ví dụ 2-80. Các kết hợp khâu-khớp được hiển thị trong Bảng 2-14.

Bảng 2-14 Bảng tham số DH để thiết lập các khung tọa độ khâu.

Khâu	Loại
1	$R \vdash R(-90)$
2	$R \vdash P(90)$
3	$P \parallel R(0)$
4	$R \vdash R(-90)$
5	$R \vdash R(90)$
6	$R \parallel R(0)$

Áp dụng các ma trận biến đổi tương ứng để chuyển từ B_i sang B_{i-1} cho thấy rằng

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}456)$$

$$^1T_2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & 0 & sin\theta_2 & 0 \\ sin\theta_2 & 0 & -cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}457)$$

$$^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}458)$$

$$^3T_4 = \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & -sin\theta_4 & 0 \\ sin\theta_4 & 0 & cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}459)$$

$$ {}^{4}T_{5} = \begin{bmatrix} cos\theta_5 & 0 & sin\theta_5 & 0 \\ sin\theta_5 & 0 & -cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}460) $$

$$ {}^{5}T_{6} = \begin{bmatrix} cos\theta_6 & -sin\theta_6 & 0 & 0 \\ sin\theta_6 & cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}461) $$

Do đó, cấu hình của khung tọa độ cuối của cổ tay B_6 trong khung tọa độ toàn cục là

$$ \begin{aligned} {}^{0}T_{6} &= {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\,{}^{3}T_{4}\,{}^{4}T_{5}\,{}^{5}T_{6} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}462) $$

Trong đó,

$$ \begin{aligned} r_{11} &= s\theta_6(-c\theta_4 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_2 s\theta_4) \\ &\quad + c\theta_6\left(-c\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 + c\theta_5(-s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4)\right) \\ r_{21} &= s\theta_6(c\theta_1 c\theta_4 - c\theta_2 s\theta_1 s\theta_4) \\ &\quad + c\theta_6\left(-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 + c\theta_5(c\theta_1 s\theta_4 + c\theta_2 c\theta_4 s\theta_1)\right) \\ r_{31} &= s\theta_2 s\theta_4 s\theta_6 + c\theta_6(-c\theta_2 s\theta_5 - c\theta_4 c\theta_5 s\theta_2) \\ r_{12} &= c\theta_6(-c\theta_4 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_2 s\theta_4) \\ &\quad - s\theta_6\left(-c\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 + c\theta_5(-s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4)\right) \\ r_{22} &= c\theta_6(c\theta_1 c\theta_4 - c\theta_2 s\theta_1 s\theta_4) \\ &\quad - s\theta_6\left(-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 + c\theta_5(c\theta_1 s\theta_4 + c\theta_2 c\theta_4 s\theta_1)\right) \\ r_{32} &= c\theta_6 s\theta_2 s\theta_4 - s\theta_6(-c\theta_2 s\theta_5 - c\theta_4 c\theta_5 s\theta_2) \\ r_{13} &= c\theta_1 c\theta_5 s\theta_2 + s\theta_5(-s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4) \\ r_{23} &= c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 + s\theta_5(c\theta_1 s\theta_4 + c\theta_2 c\theta_4 s\theta_1) \\ r_{33} &= c\theta_2 c\theta_5 - c\theta_4 s\theta_2 s\theta_5 \\ r_{14} &= -l_2 s\theta_1 + d_3 c\theta_1 s\theta_2 \\ r_{24} &= l_2 c\theta_1 + d_3 s\theta_1 s\theta_2 \\ r_{34} &= d_3 c\theta_2. \end{aligned} \quad (2\text{-}463) $$

Động học của khâu chấp hành cuối có thể được giải quyết bằng cách nhân vị trí của khung tọa độ công cụ B_7 liên quan đến điểm cổ tay, bằng ${}^{0}T_{6}$.

$$ {}^{0}T_{7} = {}^{0}T_{6}\,{}^{6}T_{7} \quad (2\text{-}464) $$

Trong đó,

$$ {}^{6}T_{7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}465) $$

Ví dụ 2-104: Kiểm tra ma trận biến đổi robot.

Để kiểm tra tính chính xác của ma trận biến đổi cuối để ánh xạ các tọa độ trong khung tọa độ công cụ vào khung tọa độ cơ sở, chúng ta có thể thiết lập các biến khớp ở một vị trí nghỉ cụ thể. Thay thế các góc khớp của robot cầu được phân tích trong Ví dụ 2-103 bằng không.

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0, \theta_4 = 0, \theta_5 = 0 \tag{2-466}$$

Vì vậy, ma trận biến đổi (2-462) sẽ là

$$\begin{aligned} {}^0T_6 &= {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-467}$$

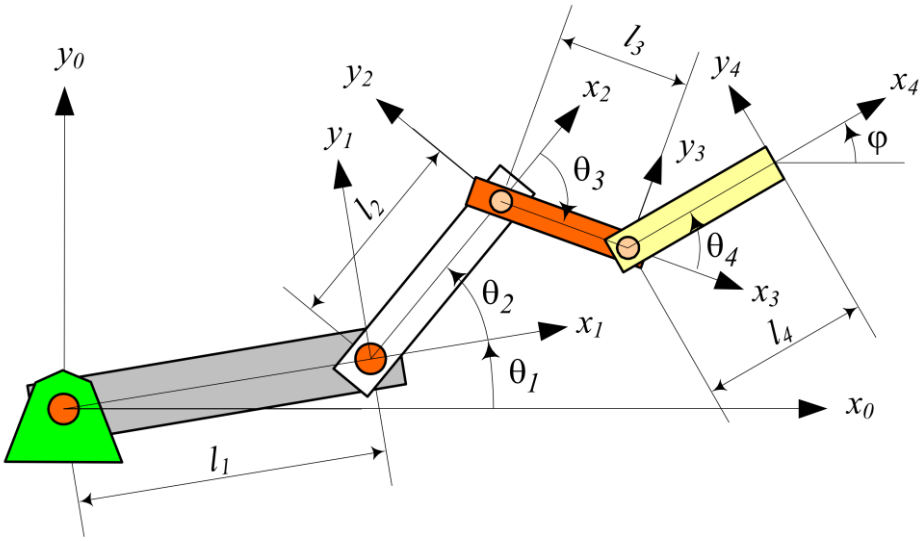
điều đó chỉ ra gốc của khung tọa độ công cụ trong cấu hình robot bị căng, tại

$${}^G\boldsymbol{r}_{o_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \tag{2-468}$$

2.5.6. Bài tập

1. Cánh tay robot phẳng 4R.

Cho cánh tay robot phẳng 4R, như được hiển thị trong Hình 2-74, tìm



Hình 2-74 Cánh tay robot phẳng 4R [1].

a. Bảng tham số DH

b. Bảng loại khâu

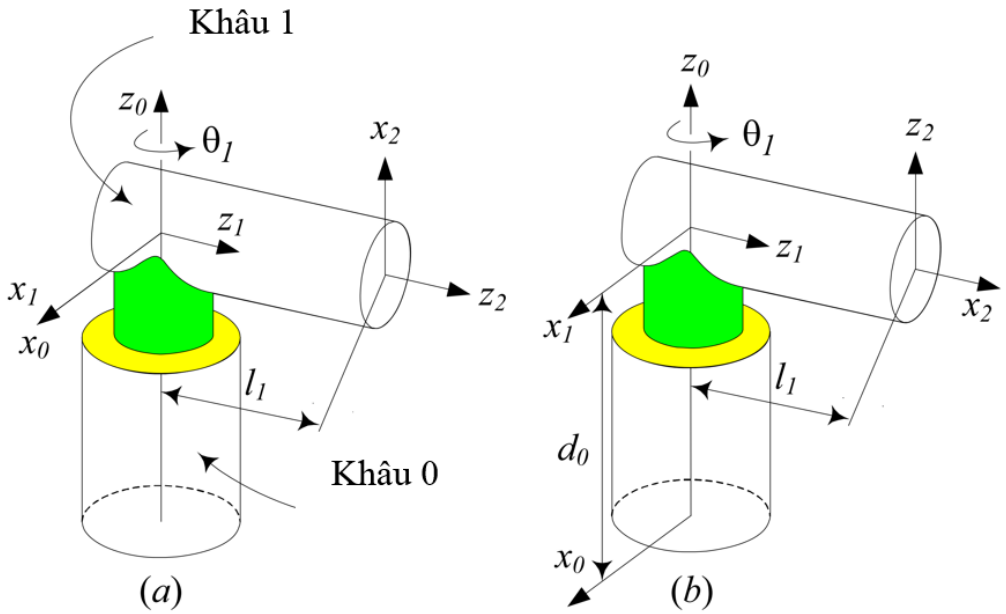
c. Ma trận biến đổi khung tọa độ ${}^{i-1}T_i, i = 1,2,3,4$

d. Hệ tọa độ toàn cục của khâu chấp hành cuối

e. Hướng của khâu chấp hành cuối φ.

2. Cánh tay robot một khâu R ⊢ R(−90).

Cho cánh tay robot một khâu R ⊢ R(−90) như được thể hiện trong Hình 5.51(a) và (b),



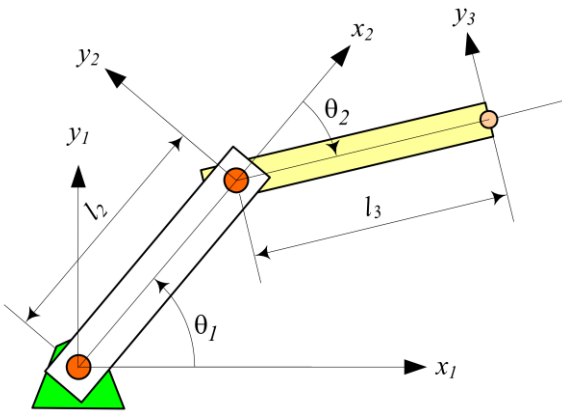
Hình 2-75 Cánh tay robot một khâu $R \vdash R(-90)$ [1].

a. Tìm các ma trận biến đổi ${}^0T_1$, ${}^1T_2$ và ${}^0T_2$.

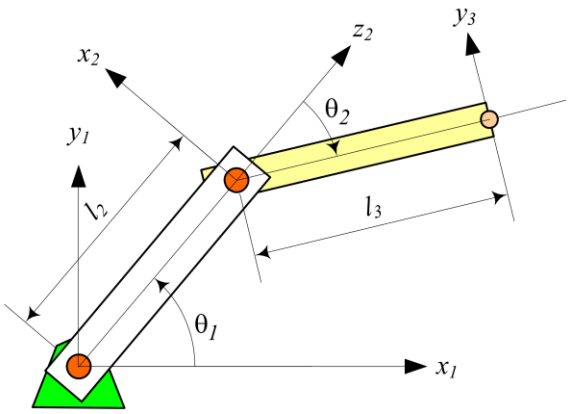
b. So sánh ma trận biến đổi ${}^1T_2$ cho cả hai cài đặt khung tọa độ.

3. Cánh tay robot phẳng 2R.

Xác định các ma trận biến đổi của các khâu ${}^1T_2$, ${}^2T_3$, và ${}^1T_3$ cho cánh tay robot phẳng 2R phẳng được hiển thị trong hình.



Hình 2-76 Cánh tay robot phẳng 2R với các khung tọa độ DH.



Hình 2-77 Cánh tay robot phẳng 2R với các khung tọa độ tùy ý.

a. Hình 2-76.

b. Hình 2-77.

4. Xác định các ma trận biến đổi ${}^3T_2$, ${}^2T_1$, và ${}^3T_1$ cho cánh tay robot như trong Hình 2-76.

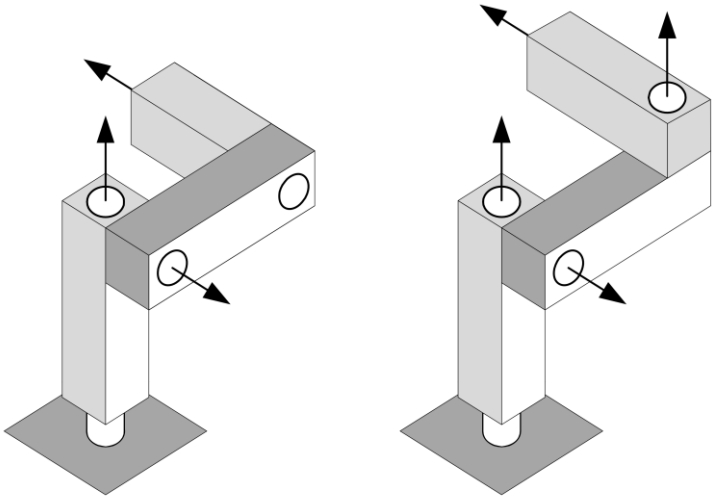
5. Dựng các khung tọa độ khâu cần thiết cho các cánh tay robot trong Hình 2-48(a) và (b).

6. Dựng hệ tọa độ DH cho các khâu kết nối.

a. Thiết lập các khung tọa độ khâu cần thiết cho các cánh tay robot trong Hình 2-78(a) và (b) bằng cách sử dụng l_1, l_2, l_3 để đại diện cho độ dài của các khâu.

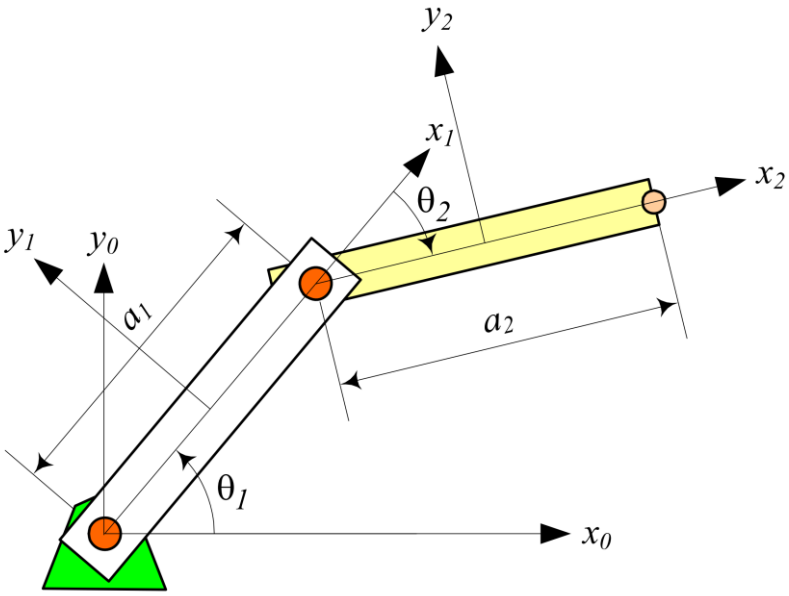
b. Xác định ma trận biến đổi động học thuận của cánh tay robot trong Hình 2-78(a) và (b) và tìm vị trí nghỉ của chúng.

c. Xác định tọa độ toàn cục của điểm tác động cuối của cánh tay robot trong Hình 2-78(a) và (b) tại vị trí được hiển thị.



Hình 2-78 Hai cánh tay robot được tạo ra bằng cách kết nối các khâu.

7. Hãy gắn hệ tọa độ của khâu tại tâm hình học của khâu, $a_i/2$. Sử dụng chuyển động cứng và ma trận đồng nhất, phát triển các ma trận biến đổi ${}^0T_1$, ${}^1T_2$, và ${}^0T_2$ cho cánh tay robot của Hình 2-79.

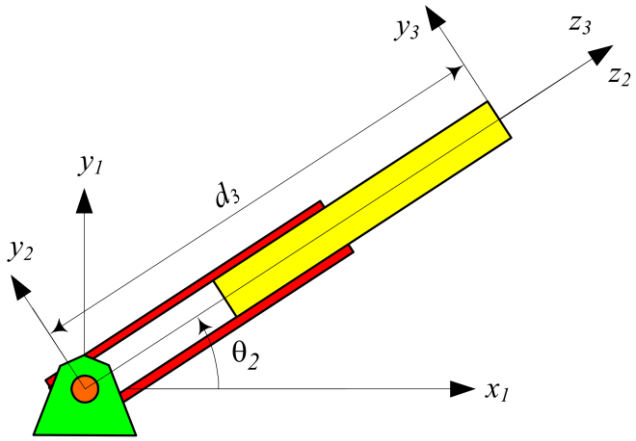


Hình 2-79 Cánh tay robot phẳng 2R với khung tọa độ tại tâm hình học của mỗi khâu.

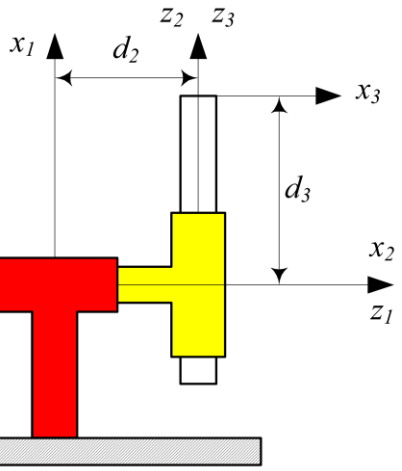
8. Xác định các ma trận biến đổi của khâu ${}^1T_2$, ${}^2T_3$, và ${}^1T_3$ cho cánh tay robot được thể hiện trong Hình 2-80.

9. Xác định các ma trận biến đổi ${}^3T_2$, ${}^2T_1$ và ${}^3T_1$ cho cánh tay máy của Hình 2-80.

10. Dùng ma trận biến đổi ${}^1T_2$, ${}^2T_3$,và ${}^1T_3$ để xác định ma trận biến đổi của khâu cho cánh tay robot Descartes phẳng như Hình 2-81. Gợi ý: Các hệ tọa độ không dựa trên quy tắc DH.

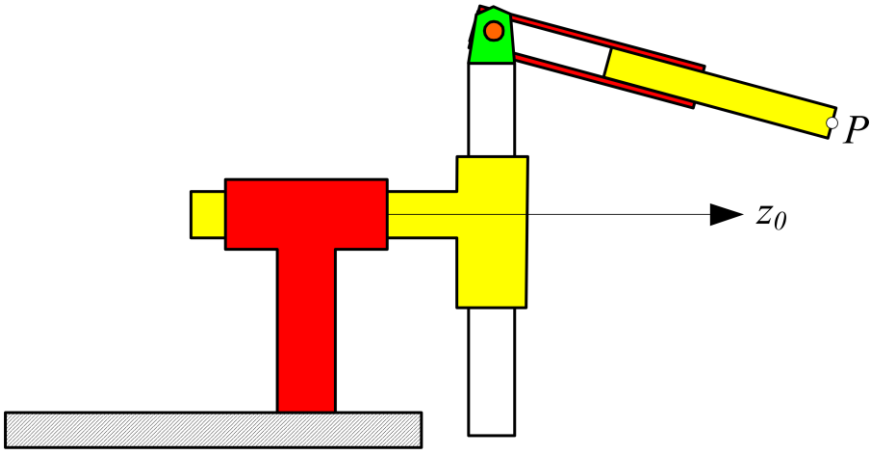


Hình 2-80 Cánh táy robot 2 bậc tự do (DOF).



Hình 2-81 Cánh tay robot Descartes 2 bậc tự do (DOF).

11. Hình 2-82 mô tả một cánh tay robot phẳng có 4 bậc tự do.



Hình 2-82 Cánh tay robot phẳng có 4 bậc tự do.

a. Dựa trên các quy tắc DH và gán các khung tọa độ khâu.

b. Xác định bảng khâu-khớp cho cánh tay robot.

c. Xác định ma trận biến đổi DH.

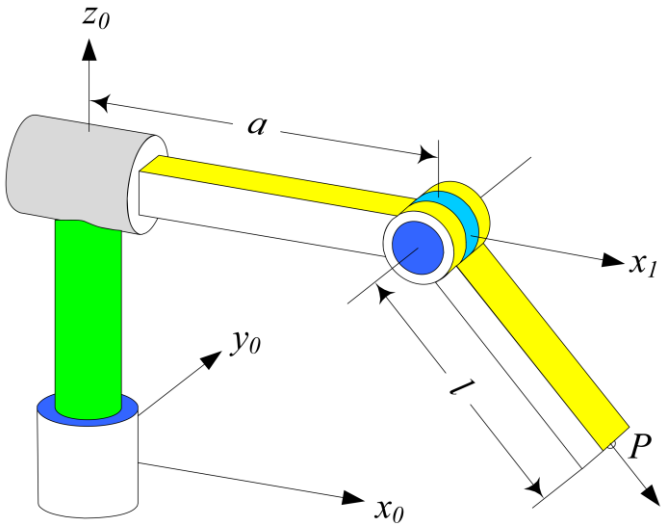
d. Xác định các tọa độ của điểm P dưới dạng các hàm của các tọa độ khớp.

e. Gắn một hệ tọa độ công cụ tại điểm P và giải bài toán động học thuận để xác định hướng của hệ tọa độ.

f. Xác định cấu hình nghỉ và ma trận biến đổi của cánh tay máy.

12. Hình 2-83 cho một cánh tay robot có 3 bậc tự do.

a. Theo các quy tắc DH và hoàn thành các khung tọa độ khâu.



Hình 2-83 Cánh tay robot 3 bậc tự do

b. Xác định bảng khâu-khớp cho cánh tay robot.

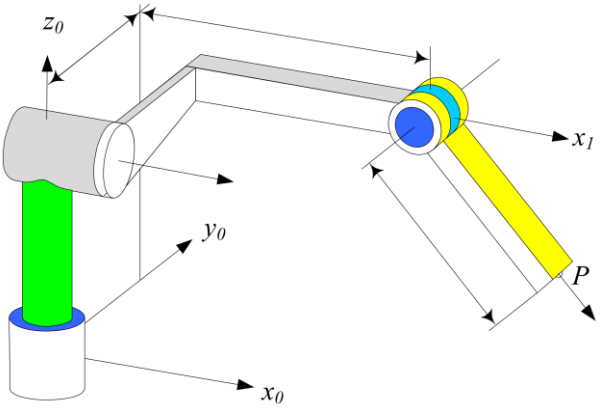
c. Xác định các ma trận biến đổi DH.

d. Xác định tọa độ của điểm P dưới dạng các hàm của các tọa độ khớp.

e. Gắn một hệ tọa độ công cụ tại điểm P và giải bài toán động học thuận để xác định hướng của hệ tọa độ.

f. Xác định cấu hình nghỉ và ma trận biến đổi của cánh tay máy.

13. Hình 2-84 mô tả một cánh tay robot dạng khớp nối.



Hình 2-84 Thiết kế của một cánh tay robot dạng khớp nối.

a. Theo các quy tắc DH và hoàn thành các khung tọa độ khâu.

b. Xác định bảng khâu-khớp cho cánh tay robot.

c. Xác định các ma trận biến đổi DH.

d. Xác định tọa độ của điểm P dưới dạng các hàm của các tọa độ khớp.

e. Gắn một hệ tọa độ công cụ tại điểm P và giải bài toán động học thuận để xác định hướng của hệ tọa độ.

f. Xác định cấu hình nghỉ và ma trận biến đổi của cánh tay máy.

2.6. Động học ngược

Động học ngược (Inverse Kinematics) đề cập đến việc xác định các biến khớp của một robot dựa trên một vị trí và hướng cụ thể của cơ cấu chấp hành cuối. Động học thuận (Forward Kinematics) của một robot 6 bậc tự do tạo ra một ma trận biến đổi kích thước 4 × 4.

$$T_6^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 = \begin{bmatrix} R_6^0 & d_6^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong đó, chỉ có sáu thành phần trong tổng số 12 thành phần của ma trận T_6^0 là độc lập. Do đó, động học ngược được rút gọn thành việc tìm sáu thành phần độc lập cho một ma trận T_6^0 cụ thể.

Phương pháp áp dụng để giải quyết bài toán động học ngược gồm ba phương pháp: phân tách, biến đổi nghịch và phương pháp lặp. Trong phương pháp phân tách, động học ngược của một robot với khớp cổ tay cầu có thể được phân tách thành hai bài toán con: động học ngược vị trí và động học ngược hướng. Trong thực tế, ma trận biến đổi có gắn dụng cụ T_7^0 được phân rã thành ba ma trận con: T_3^0, T_6^3 và T_7^6.

$$T_7^0 = T_3^0 T_6^3 T_7^6$$

Ma trận T_3^0 xác định vị trí của điểm cổ tay và phụ thuộc vào ba biến khớp của cơ cấu chấp hành. Ma trận T_6^3 là ma trận biến đổi cổ tay và T_7^6 là ma trận biến đổi có gắn dụng cụ.

Trong phương pháp biến đổi nghịch, chúng ta trích xuất từng bước các phương trình chỉ với một ẩn số từ các phương trình ma trận sau đây.

$$T_6^1 = (T_1^0)^{-1} T_6^0$$
$$T_6^2 = (T_2^1)^{-1} (T_1^0)^{-1} T_6^0$$
$$T_6^3 = (T_3^2)^{-1} (T_2^1)^{-1} (T_1^0)^{-1} T_6^0$$
$$T_6^4 = (T_4^3)^{-1} (T_3^2)^{-1} (T_2^1)^{-1} (T_1^0)^{-1} T_6^0$$
$$T_6^5 = (T_5^4)^{-1} (T_4^3)^{-1} (T_3^2)^{-1} (T_2^1)^{-1} (T_1^0)^{-1} T_6^0$$
$$I = (T_6^5)^{-1} (T_5^4)^{-1} (T_4^3)^{-1} (T_3^2)^{-1} (T_2^1)^{-1} (T_1^0)^{-1} T_6^0$$

Phương pháp lặp là một phương pháp số nhằm tìm vector biến khớp q cho một tập hợp phương trình $T(q) = 0$.

2.6.1. Phương pháp phân tách

Xác định các biến khớp dựa trên vị trí và hướng của cơ cấu chấp hành cuối gọi là động học ngược. Theo toán học, động học ngược là việc tìm các thành phần của vector q.

$$q = [q_1\ q_2\ q_3 \dots\ q_n]^T \tag{2-469}$$

Khi một phép biến đổi T_n^0 được cho dưới dạng một hàm của các biến khớp $q_1\ q_2\ q_3 \dots\ q_n$.

$$T_n^0 = T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) T_3^2(q_3) T_4^3(q_4) \dots T_n^{n-1}(q_n) \tag{2-470}$$

Các robot được điều khiển bằng máy tính thường hoạt động trong không gian biến khớp, tuy nhiên các đối tượng cần điều khiển thường được biểu diễn trong hệ toạ độ Descartes tổng thể. Do đó, việc chuyển thông tin động học, qua lại, giữa không gian biến khớp và không gian Descartes là cần thiết trong robot học. Để điều khiển cấu hình của cơ cấu chấp hành cuối đến một đối tượng, bài toán động học ngược phải được giải quyết. Do đó, chúng ta cần biết các giá trị biến khớp cần thiết để đến một điểm và một hướng mong muốn.

Kết quả của động học thuận của một robot 6 bậc tự do là một ma trận biến đổi kích thước 4 × 4.

$$T_6^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}471)$$

Trong đó, 12 thành phần là các hàm lượng giác của sáu biến khớp chưa biết. Tuy nhiên, vì phần ma trận con 3 × 3 trên cùng bên trái của Phương trình (2-471) là một ma trận quay, chỉ có ba thành phần trong số chúng là độc lập. Điều này là do điều kiện trực giao. Do đó, chỉ có sáu phương trình trong tổng số 12 phương trình của (2-471) là độc lập.

Các hàm lượng giác mặc định cung cấp nhiều giải pháp. Do đó, dự kiến sẽ có nhiều cấu hình của robot khi giải sáu phương trình để tìm các biến khớp chưa biết.

Có thể phân tách bài toán động học ngược thành hai bài toán con, gọi là động học ngược vị trí và động học ngược hướng. Kết quả thực tế của việc phân tách như vậy là cho phép chia bài toán thành hai bài toán độc lập, mỗi bài toán chỉ có ba tham số chưa biết. Theo nguyên tắc phân tách, ma trận biến đổi tổng thể của một robot có thể phân tách thành một phép dịch chuyển và một phép quay.

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} R_6^0 & d_6^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D_6^0 R_6^0 = \begin{bmatrix} I & d_6^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_6^0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}472)$$

Ma trận dịch chuyển D_6^0 chỉ ra vị trí của cơ cấu chấp hành cuối trong B_0 (hệ toạ độ gốc) và chỉ liên quan đến ba biến khớp của cơ cấu. Chúng ta có thể giải d_6^0 để tìm các biến điều khiển vị trí cổ tay.

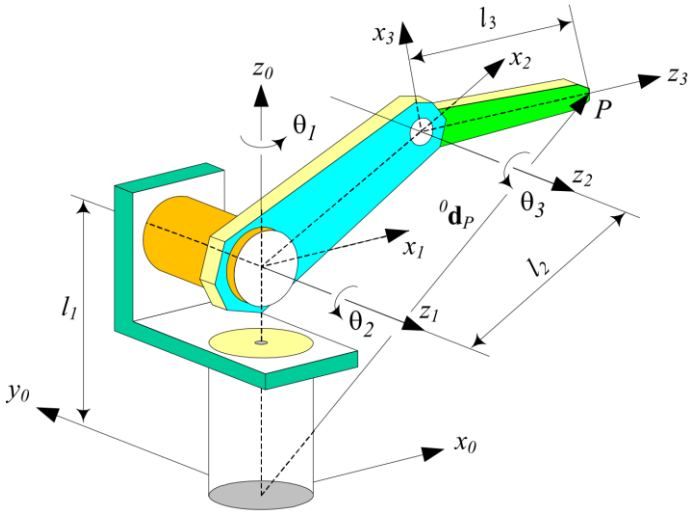
Ma trận quay R_6^0 chỉ ra hướng của cơ cấu chấp hành cuối trong B_0 và chỉ liên quan đến ba biến khớp của cổ tay. Chúng ta có thể giải R_6^0 để tìm các biến điều khiển hướng cổ tay.

Ví dụ 2-105: Một tay máy dạng khớp nối.

Xem xét một tay máy có khớp nối như được thể hiện trong Hình 2-85. Các ma trận biến đổi liên quan giữa các hệ toạ độ là:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & -cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}473)$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}474)$$



Hình 2-85 Tay máy dạng khớp nối.

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 0 \\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}475)$$

Động học thuận của tay máy là:

$$T_3^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 c(\theta_2+\theta_3) & s\theta_1 & c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_2 c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & -c\theta_1 & s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_2 c\theta_2 s\theta_1 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & l_1 + l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}476)$$

Và do đó, điểm P là:

$$d_6^0 = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = T_3^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 sin(\theta_2+\theta_3)cos\theta_1 + l_2 cos\theta_1 cos\theta_2 \\ l_3 sin(\theta_2+\theta_3)sin\theta_1 + l_2 sin\theta_1 cos\theta_2 \\ l_1 - l_3 cos(\theta_2+\theta_3) + l_2 sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}477)$$

Điểm P được giả định là điểm mà chúng ta gắn cổ tay cầu vào. Do đó, d_P^0 là vector vị trí phân tách của điểm cổ tay mà sẽ không bị ảnh hưởng bởi việc gắn cổ tay. d_P^0 cung cấp ba phương trình cho ba biến khớp của tay máy $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Góc đầu tiên có thể được xác định từ:

$$d_x sin\theta_1 - d_y cos\theta_1 = 0 \quad (2\text{-}478)$$

$$\theta_1 = atan2(d_y, d_x) \quad (2\text{-}479)$$

Chúng ta kết hợp hai thành phần đầu tiên của d_P^0 để tìm được:

$$d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1 = l_3 sin(\theta_2+\theta_3) + l_2 cos\theta_2 \quad (2\text{-}480)$$

Bây giờ, kết hợp phương trình này và thành phần thứ ba của d_P^0 sẽ cho ra:

$$(d_z - l_1 - l_2 sin\theta_2)^2 + (d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1 - l_2 cos\theta_2)^2 = {l_3}^2 \quad (2\text{-}481)$$

Hoặc

$$-2l_2\left(d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1\right)cos\theta_2 + 2l_2(l_1 - d_z)sin\theta_2 = {l_3}^2 - \left(\left(d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1\right)^2 + {l_1}^2 - 2l_1 d_z + {l_2}^2 + {d_z}^2\right) \quad (2\text{-}482)$$

đây là một phương trình lượng giác có dạng:

$$acos\theta_2 + bsin\theta_2 = c \quad (2\text{-}483)$$

$$a = -2l_2\left(d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1\right)$$
$$b = 2l_2(l_1 - d_z) \quad (2\text{-}484)$$
$$c = {l_3}^2 - \left(\left(d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1\right)^2 + {l_1}^2 - 2l_1 d_z + {l_2}^2 + {d_z}^2\right)$$

Giải phương trình này để tìm θ_2. Chia (2-480) cho thành phần thứ ba của d_P^0 sẽ xác định θ_3.

$$tan(\theta_2 + \theta_3) = \frac{d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1 - l_2 cos\theta_2}{l_1 + l_2 sin\theta_2 - d_z} \quad (2\text{-}485)$$

$$\theta_3 = atan2\left(\frac{d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1 - l_2 cos\theta_2}{l_1 + l_2 sin\theta_2 - d_z}\right) - \theta_2 \quad (2\text{-}486)$$

Ví dụ 2-106: Trường hợp số học của tay máy dạng khớp nối.

Để kiểm tra các phương trình động học ngược của Ví dụ 2-105, xem xét tay máy có khớp nối với các kích thước sau đây:

$$l_1 = 1m$$
$$l_2 = 1.05m \quad (2\text{-}487)$$
$$l_3 = 0.89m$$

Khi điểm tác động cuối là:

$$d_P^0 = [1 \quad 1.1 \quad 1.2]^T \quad (2\text{-}488)$$

Phương trình (2-479) xác định θ_1.

$$\theta_1 = atan2\left(d_y, d_x\right) = tan^{-1}\frac{1.1}{1} = 0.83298\, rad \approx 47.727^{\,o} \quad (2\text{-}489)$$

Để xác định θ_2, giải phương trình (2-483)

$$acos\theta_2 + bsin\theta_2 = c \quad (2\text{-}490)$$

Trong đó,

$$a = -2l_2\left(d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1\right) = -3.941263019 \quad (2\text{-}491)$$

$$= 2l_2(l_1 - d_z) = -0.5302360813 \quad (2\text{-}492)$$

$$c = {l_3}^2 - \left(\left(d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1\right)^2 + {l_1}^2 - 2l_1 d_z + {l_2}^2 + {d_z}^2\right) = -3.232420149, -5.232420149 \quad (2\text{-}493)$$

Tìm hai giá trị θ_2 đối với $c = -3.232$

$$\theta_2 = 0.7555416816\, rad \approx 43.28934959^o \quad (2\text{-}494)$$

$$\theta_2 = -0.4880785028\, rad \approx -27.96483827^o \quad (2\text{-}495)$$

Và không có kết quả thực đối với $c = -5.232$

θ_3 được tính từ (2-486). Nếu $\theta_2 = 0.755\, rad$

$$\theta_3 = atan2\left(\frac{d_x cos\theta_1 + d_y sin\theta_1 - l_2 cos\theta_2}{l_1 + l_2 sin\theta_2 - d_z}\right) - \theta_2 = 0.1913201914 rad \approx 11^o \quad (2\text{-}496)$$

Và nếu $\theta_2 = -0.488\, rad$ thì ta có:

$$\theta_3 = -0.1913201910 rad \approx -11^o \quad (2\text{-}497)$$

Ví dụ 2-107: Động học ngược tay máy phẳng hai khớp quay.

Hình 2-41 mô tả một tay máy phẳng hai khớp quay 2R với hai khâu $R \parallel R$ theo các khung tọa độ được thiết lập như trong hình. Động học thuận của tay máy là:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}498)$$

Động học ngược của các robot phẳng thường dễ tìm theo phương pháp phân tích. Vị trí của điểm tác động cuối là:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}499)$$

Do đó

$$X^2 + Y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 cos\theta_2 \quad (2\text{-}500)$$

Và

$$cos\theta_2 = \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad (2\text{-}501)$$

$$\theta_2 = cos^{-1}\frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad (2\text{-}502)$$

Tuy nhiên, thường chúng ta tránh sử dụng hàm $arcsin$ và $arccos$ do tính không chính xác. Vì vậy, chúng ta sử dụng công thức nửa góc

$$tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-cos\theta}{1+cos\theta} \tag{2-503}$$

Để tìm θ_2 sử dụng hàm $atan2$

$$\theta_2 = \pm 2atan2\sqrt{\frac{(l_1+l_2)^2-(X^2+Y^2)}{(X^2+Y^2)-(l_1-l_2)^2}} \tag{2-504}$$

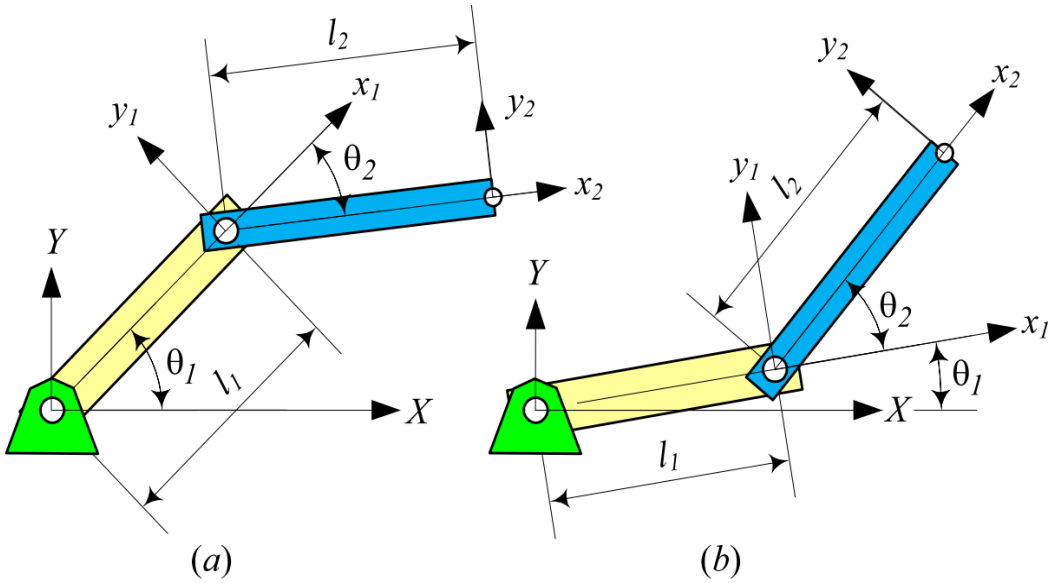
Dấu ± là do căn bậc hai, tạo ra hai giải pháp. Hai giải pháp này được gọi là khuỷu tay hướng lên và khuỷu tay hướng xuống, như được thể hiện trong Hình 2-86(a) và (b) tương ứng.

Biến khớp θ_1 của cấu hình khuỷu tay hướng lên là:

$$\theta_1 = atan2\frac{Y}{X} + atan2\frac{l_2 sin\theta_2}{l_1 + l_2 cos\theta_2} \tag{2-505}$$

Và cấu hình khuỷu tay hướng xuống là:

$$\theta_1 = atan2\frac{Y}{X} - atan2\frac{l_2 sin\theta_2}{l_1 + l_2 cos\theta_2} \tag{2-506}$$



Hình 2-86 Minh họa về một tay máy phẳng 2R trong hai cấu hình: (a) khuỷu tay hướng lên và (b) khuỷu tay hướng xuống.

Góc θ_1 cũng có thể được xác định từ phương trình thay thế sau đây.

$$\theta_1 = atan2\frac{-Xl_2 sin\theta_2 + Y(l_1 + l_2 cos\theta_2)}{Yl_2 sin\theta_2 + X(l_1 + l_2 cos\theta_2)} \tag{2-507}$$

Hầu hết, giá trị của θ_1 nên được sửa đổi bằng cách cộng hoặc trừ π tùy thuộc vào dấu của X. Cũng có thể kết hợp các phương trình và xác định một phương trình lượng giác cho θ_1.

$$2Xl_1 cos\theta_1 + 2Yl_1 sin\theta_1 = X^2 + Y^2 + l_1^2 - l_2^2 \tag{2-508}$$

Cũng có thể sử dụng phương trình sau đây.

$$l_1 + l_2 cos\theta_2 = \frac{X^2 + Y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1} \tag{2-509}$$

Hai tập giải pháp khác nhau cho θ_1 và θ_2 tương ứng với cấu hình khuỷu tay hướng lên và hướng xuống.

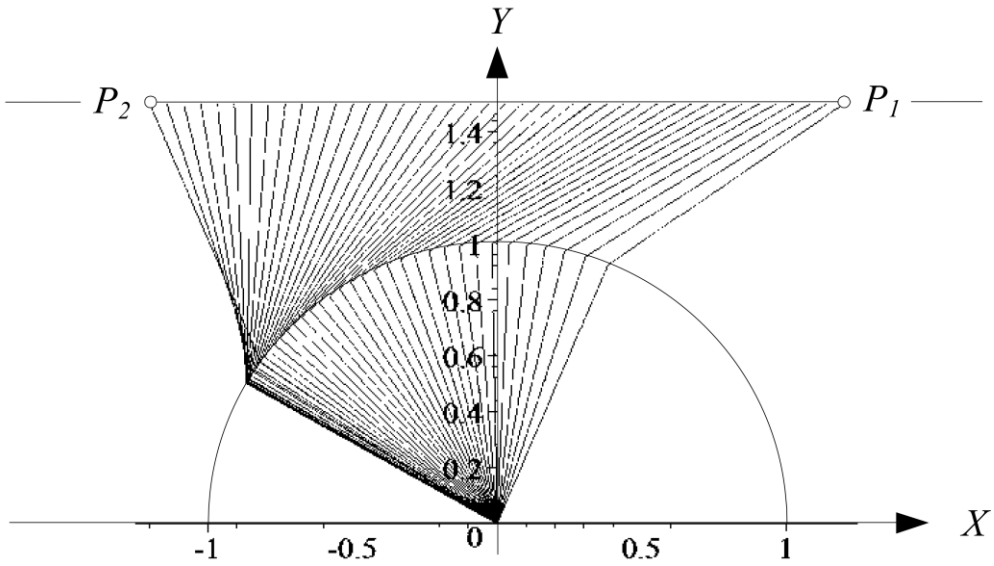
Ví dụ 2-108: Chuyển động của tay máy phẳng hai khớp quay 2R.

Xem xét tay máy phẳng hai khớp quay 2R

$$l_1 = 1 \text{ m}, \qquad l_2 = 1 \text{ m} \tag{2-510}$$

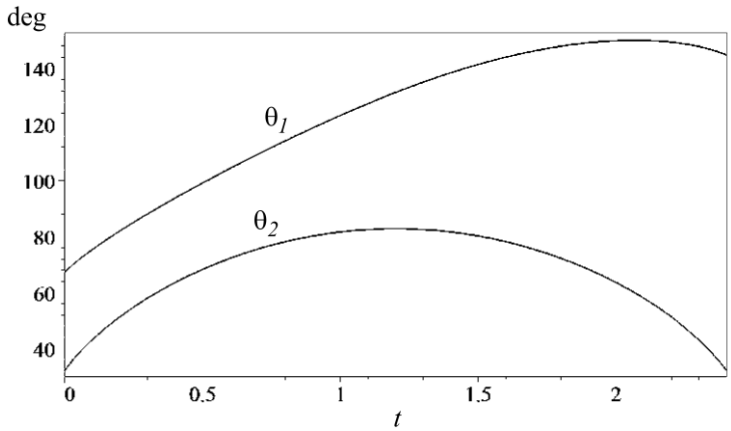
Điểm đầu mút của nó đang di chuyển từ $P_1(1.2,1.5)$ đến $P_2(-1.2,1.5)$ trên một đường thẳng. Sử dụng các phương trình động học ngược (2-502) và (2-505), chúng ta có thể xác định cấu hình của tay máy ở bất kỳ điểm nào trên đường đi. Hình 2-87 minh họa tay máy tại 42 điểm cách đều nhau giữa P_1 và P_2. Giả sử rằng điểm đầu mút đang di chuyển trên đường thẳng trong khoảng thời gian sau:

$$X = 1.2 - t \; Y = 1.5 \; 0 \le t \le 2.4 \tag{2-511}$$



Hình 2-87 Cánh tay robot phẳng 2R với $l_1 = 1\ m$, $l_2 = 1\ m$ di chuyển từ P_1 đến P_2 trên một đường thẳng.

Biến thiên của các góc θ_1 và θ_2 được thể hiện như trong Hình 2-88.



Hình 2-88 Biến thiên của các góc θ_1 và θ_2 của cánh tay robot phẳng 2R [1].

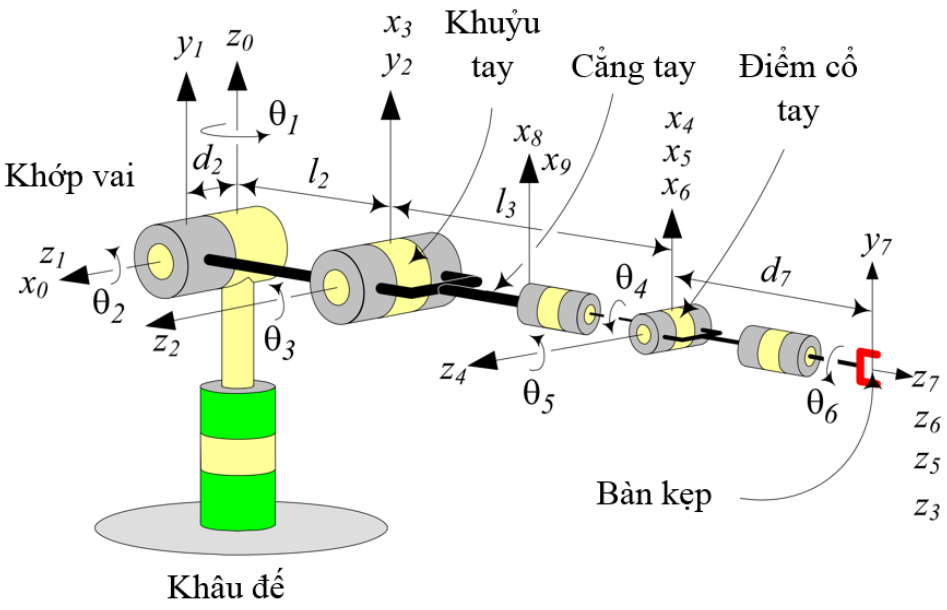
Ví dụ 2-109: Động học ngược robot dạng khớp nối.

Động học thuận của robot dạng khớp nối, minh họa trong Hình 2-89, trong đó ma trận biến đổi tổng thể của khâu chấp hành cuối đã được xác định, dựa trên các ma trận biến đổi của cổ tay và cánh tay.

$$ {}^{0}T_{7} = T_{\text{arm}}\, T_{\text{wrist}} = {}^{0}T_{3}\, {}^{3}T_{7} \tag{2-512} $$

Ma trận biến đổi cổ tay T_{wrist} được mô tả trong (2-426) và bảng biến đổi cơ cấu tay T_{arm} được xác định trong (2-388). Tuy nhiên, theo một khung tọa độ mới, như được hiển thị trong Hình 2-89, chúng ta có một robot 6R với cấu hình có sáu khớp.

	$R \vdash R(90)$
	$R \parallel R(0)$
	$R \vdash R(90)$
	$R \vdash R(-90)$
	$R \vdash R(90)$
	$R \parallel R(0)$



Hình 2-89 Cánh tay robot dạng khớp nối 6 bậc tự do [1].

và một sự thay đổi vị trí T_{Z,d_7}. Do đó, ma trận biến đổi của các khâu riêng lẻ là

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & -cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-513} $$

$$ {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2 cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}514) $$

$$ {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 0 \\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}515) $$

$$ {}^{3}T_{4} = \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & -sin\theta_4 & 0 \\ sin\theta_4 & 0 & cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}516) $$

$$ {}^{4}T_{5} = \begin{bmatrix} cos\theta_5 & 0 & sin\theta_5 & 0 \\ sin\theta_5 & 0 & -cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}517) $$

$$ {}^{5}T_{6} = \begin{bmatrix} cos\theta_6 & -sin\theta_6 & 0 & 0 \\ sin\theta_6 & cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}518) $$

$$ {}^{6}T_{7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}519) $$

và ma trận biến đổi công cụ trong hệ tọa độ cơ sở là

$$ \begin{aligned} {}^{0}T_{7} &= {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\,{}^{3}T_{4}\,{}^{4}T_{5}\,{}^{5}T_{6}\,{}^{6}T_{7} \\ &= {}^{0}T_{3}\,{}^{3}T_{6}\,{}^{6}T_{7} \\ &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}520) $$

Trong đó,

$$ {}^{0}T_{3} = \begin{bmatrix} c\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & s\theta_1 & c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_2 c\theta_1 c\theta_2 + d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & -c\theta_1 & s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_2 c\theta_2 s\theta_1 - d_2 c\theta_1 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}521) $$

$$ {}^{3}T_{6} = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_6 s\theta_4 - c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ c\theta_5 c\theta_6 s\theta_4 + c\theta_4 s\theta_6 & c\theta_4 cc\theta_6 - c\theta_5 s\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ -c\theta_6 s\theta_5 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}522) $$

Và

$$t_{11} = c\theta_1\big(c(\theta_2+\theta_3)(c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6) - c\theta_6s\theta_5s(\theta_2+\theta_3)\big) + s\theta_1(c\theta_4s\theta_6 + c\theta_5c\theta_6s\theta_4) \quad (2\text{-}523)$$

$$t_{21} = s\theta_1\big(c(\theta_2+\theta_3)(-s\theta_4s\theta_6 + c\theta_4c\theta_5c\theta_6) - c\theta_6s\theta_5s(\theta_2+\theta_3)\big) - c\theta_1(c\theta_4s\theta_6 + c\theta_5c\theta_6s\theta_4) \quad (2\text{-}524)$$

$$t_{31} = s(\theta_2+\theta_3)(c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6) + c\theta_6s\theta_5c(\theta_2+\theta_3) \quad (2\text{-}525)$$

$$t_{12} = c\theta_1\big(s\theta_5s\theta_6s(\theta_2+\theta_3) - c(\theta_2+\theta_3)(c\theta_6s\theta_4 + c\theta_4c\theta_5s\theta_6)\big) + s\theta_1(c\theta_4c\theta_6 - c\theta_5s\theta_4s\theta_6) \quad (2\text{-}526)$$

$$t_{22} = s\theta_1\big(s\theta_5s\theta_6s(\theta_2+\theta_3) - c(\theta_2+\theta_3)(c\theta_6s\theta_4 + c\theta_4c\theta_5s\theta_6)\big) + c\theta_1(-c\theta_4c\theta_6 + c\theta_5s\theta_4s\theta_6) \quad (2\text{-}527)$$

$$t_{32} = -s\theta_5s\theta_6c(\theta_2+\theta_3) - s(\theta_2+\theta_3)(c\theta_6s\theta_4 + c\theta_4c\theta_5s\theta_6) \quad (2\text{-}528)$$

$$t_{13} = s\theta_1s\theta_4s\theta_5 + c\theta_1\big(c\theta_5s(\theta_2+\theta_3) + c\theta_4s\theta_5c(\theta_2+\theta_3)\big) \quad (2\text{-}529)$$

$$t_{23} = -c\theta_1s\theta_4s\theta_5 + s\theta_1\big(c\theta_5s(\theta_2+\theta_3) + c\theta_4s\theta_5c(\theta_2+\theta_3)\big) \quad (2\text{-}530)$$

$$t_{33} = c\theta_4s\theta_5s(\theta_2+\theta_3) - c\theta_5c(\theta_2+\theta_3) \quad (2\text{-}531)$$

$$t_{14} = d_6\Big(s\theta_1s\theta_4s\theta_5 + c\theta_1\big(c\theta_4s\theta_5c(\theta_2+\theta_3) + c\theta_5s(\theta_2+\theta_3)\big)\Big) + l_3c\theta_1s(\theta_2+\theta_3) + d_2s\theta_1 + l_2c\theta_1c\theta_2 \quad (2\text{-}532)$$

$$t_{24} = d_6\Big(-c\theta_1s\theta_4s\theta_5 + s\theta_1\big(c\theta_4s\theta_5c(\theta_2+\theta_3) + c\theta_5s(\theta_2+\theta_3)\big)\Big) + s\theta_1s(\theta_2+\theta_3)l_3 - d_2c\theta_1 + l_2c\theta_2s\theta_1 \quad (2\text{-}533)$$

$$t_{34} = d_6\big(c\theta_4s\theta_5s(\theta_2+\theta_3) - c\theta_5c(\theta_2+\theta_3)\big) + l_2s\theta_2 + l_3c(\theta_2+\theta_3). \quad (2\text{-}534)$$

Giải bài toán động ngược học của robot bằng cách sử dụng vector vị trí cổ tay d, có dạng là $[t_{14} \quad t_{24} \quad t_{34}]^T$ của ${}^0T_7$ cho $d_7 = 0$.

$$d = \begin{bmatrix} c\theta_1(l_3s(\theta_2+\theta_3) + l_2c\theta_2) + d_2s\theta_1 \\ s\theta_1(l_3s(\theta_2+\theta_3) + l_2c\theta_2) - d_2c\theta_1 \\ l_3c(\theta_2+\theta_3) + l_2s\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \quad (2\text{-}535)$$

Theo lý thuyết, chúng ta phải có thể giải phương trình (2-535) cho ba biến góc khớp $\theta_1, \theta_2,$ và θ_3. Có thể thấy rằng

$$d_x sin\theta_1 - d_y cos\theta_1 = d_2 \quad (2\text{-}536)$$

Mà có

$$\theta_1 = 2atan2\left(d_x \pm \sqrt{d_x^2 + d_y^2 - d_2^2}, d_2 - d_y\right) \quad (2\text{-}537)$$

Phương trình (2-537) có hai giải pháp cho $d_x^2 + d_y^2 > d_2^2$, một giải pháp cho $d_x^2 + d_y^2 = d_2^2$, và không có giải pháp thực cho $d_x^2 + d_y^2 < d_2^2$.

Kết hợp hai phần tử đầu tiên của d cho

$$l_3 sin(\theta_2 + \theta_3) = \pm\sqrt{d_x^2 + d_y^2 - d_2^2} - l_2 cos\theta_2 \tag{2-538}$$

Tiếp theo, phần tử thứ ba của d được sử dụng để tìm

$$l_3^2 = \left(\pm\sqrt{d_x^2 + d_y^2 - d_2^2} - l_2 cos\theta_2\right)^2 + (d_z - l_2 sin\theta_2)^2 \tag{2-539}$$

có thể được sắp xếp lại thành dạng sau

$$acos\theta_2 + bsin\theta_2 = c \tag{2-540}$$

$$\begin{aligned} a &= 2l_2\sqrt{d_x^2 + d_y^2 - d_2^2} \\ b &= 2l_2 d_z \\ c &= d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 - d_2^2 + l_2^2 - l_3^2. \end{aligned} \tag{2-541}$$

Với hai giải pháp

$$\begin{aligned} \theta_2 &= atan2\left(\frac{c}{r}, \pm\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}\right) - atan2(a, b) \\ r^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{2-542}$$

Tổng bình phương các phần tử của d ta có

$$d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = d_2^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 sin(2\theta_2 + \theta_3) \tag{2-543}$$

Mà có

$$\theta_3 = arcsin\left(\frac{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 - d_2^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}\right) - 2\theta_2 \tag{2-544}$$

Có θ_1, θ_2 và θ_3 có nghĩa là chúng ta có thể tìm điểm cổ tay trong không gian. Tuy nhiên, vì các biến khớp độc lập trong ${}^0T_3$ và trong ${}^3T_6$, chúng ta tìm hướng của khâu chấp hành cuối bằng cách giải ${}^3T_6$ hoặc ${}^3R_6$ để có θ_4, θ_5, và θ_6.

$$\begin{aligned} {}^3R_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_6 s\theta_4 - c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 \\ c\theta_5 c\theta_6 s\theta_4 + c\theta_4 s\theta_6 & c\theta_4 cc\theta_6 - c\theta_5 s\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 \\ -c\theta_6 s\theta_5 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-545}$$

Góc θ_4, θ_5, và θ_6 có thể được xác định bằng cách xem xét các thành phần của ${}^3R_6$

$$\begin{aligned} \theta_4 &= atan2(s_{23}, s_{13}) \\ \theta_5 &= atan2\left(\sqrt{s_{13}^2 + s_{23}^2}, s_{33}\right) \\ \theta_6 &= atan2(s_{32}, -s_{31}). \end{aligned} \tag{2-546}$$

Ví dụ 2-110: Giải pháp cho phương trình lượng giác $acos\theta + bsin\theta = c$.

Loại đầu tiên của phương trình lượng giác

$$acos\theta + bsin\theta = c \tag{2-547}$$

Vấn đề có thể được giải quyết bằng cách thêm hai biến mới r và ϕ sao cho

$$\begin{aligned} a &= rsin\phi \\ b &= rcos\phi \end{aligned} \tag{2-548}$$

và

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= atan2(a, b). \end{aligned} \tag{2-549}$$

Thay thế các biến mới thấy rằng

$$\begin{aligned} sin(\phi + \theta) &= \frac{c}{r} \\ cos(\phi + \theta) &= \pm\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}. \end{aligned} \tag{2-550}$$

Do đó, các giải pháp của bài toán là

$$\theta = atan2\left(\frac{c}{r}, \pm\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}\right) - atan2(a, b) \tag{2-551}$$

Hoặc

$$\theta = atan2\left(c, \pm\sqrt{r^2 - c^2}\right) - atan2(a, b). \tag{2-552}$$

Vậy, phương trình $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ có hai nghiệm nếu $r^2 = a^2 + b^2 > c^2$, một nghiệm nếu $r^2 = c^2$, và không có nghiệm nào nếu $r^2 < c^2$

Ví dụ, hãy giải phương trình sau đây.

$$1.5cos\theta + 2.5sin\theta = 2.549 \tag{2-553}$$

Có $a = 1.5$ và $b = 2.5$, chúng ta tìm r và ϕ.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} = 2.915475947 \\ \phi &= atan2(a, b) = 0.5404195\ rad \end{aligned} \tag{2-554}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \theta &= atan2\left(c, \pm\sqrt{r^2 - c^2}\right) - atan2(a, b) \\ &= atan2(2.549, \pm\sqrt{2}) - \phi \\ &= 0.5235718477\ rad, 1.537181805\ rad \\ &\approx 30\text{ độ}, 88.07\text{ độ} \end{aligned} \tag{2-555}$$

Ví dụ 2-111: Công dụng của hàm $\tan_2^{-1}\frac{y}{x} = \text{atan2}(y, x)$.

Trong tính toán robot, đặc biệt là khi giải các bài toán động học nghịch, chúng ta cần tìm góc dựa trên các hàm *sin* và *cos* của góc. Tuy nhiên, $\tan^{-1}$ không thể hiện được ảnh hưởng của dấu riêng lẻ cho tử số và mẫu số. Nó luôn biểu diễn một góc ở góc phần tư thứ nhất hoặc thứ tư. Để giải quyết vấn đề này và xác định các góc khớp ở góc phần tư đúng, hàm $atan2$ được xác định như sau:

$$atan2(y,x) = \begin{cases} sgny tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| & nếu \quad x > 0, y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} sgny & nếu \quad x = 0, y \neq 0 \\ sgny\left(\pi - tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|\right) & nếu \quad x < 0, y \neq 0 \\ \pi - \pi sgnx & nếu \quad x \neq 0, y = 0 \end{cases} \tag{2-556}$$

sgn đại diện cho hàm $signum$.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & nếu \quad x > 0 \\ 0 & nếu \quad x = 0 \\ -1 & nếu \quad x < 0 \end{cases} \tag{2-557}$$

Ví dụ, hãy so sánh $\tan^{-1}$ và $atan2$ cho bốn điểm trong bốn góc phần tư.

$$\begin{array}{llll} x = 1, y = 1 & \text{thì} & tan^{-1}\frac{1}{1} = 0.785 & atan2(1,1) = 0.785 \\ x = -1, y = 1 & \text{thì} & tan^{-1}\frac{1}{-1} = -0.785 & atan2(1,-1) = 2.356 \\ x = -1, y = -1 & \text{thì} & tan^{-1}\frac{-1}{-1} = 0.785 & atan2(-1,-1) = -2.356 \\ x = 1, y = -1 & \text{thì} & tan^{-1}\frac{-1}{1} = -0.785 & atan2(-1,1) = -0.785 \end{array} \tag{2-558}$$

Dù đã được đề cập hay không, bất cứ khi nào $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ được sử dụng, nó phải được tính dựa trên hàm $atan2\ (y,x)$.

Ví dụ 2-112: Các tính chất cơ bản của $arcsin$ và $arccos$.

Giải pháp tổng quát của các phương trình.

$$sin\varphi = acos\theta = btan\psi = c \tag{2-559}$$

là:

$$\begin{array}{ll} \varphi & = sin^{-1}a = (-1)^k sin^{-1}a + k\pi \\ \theta & = cos^{-1}b = \pm cos^{-1}b + 2k\pi \\ \psi & = tan^{-1}c = tan^{-1}c + k\pi \quad c^2 \neq -1 \end{array} \tag{2-560}$$

Ví dụ 2-113: Công thức động học nghịch tổng quát về động học robot.

Dưới đây là một số phương trình lượng giác chung thường xuất hiện trong các bài toán động học ngược của robot. Các phương trình và giải pháp phổ biến nhất được mô tả như sau:

1. Nếu

$$sin\theta = a \tag{2-561}$$

Thì, chúng ta có hai đáp án: θ và $\pi - \theta$.

$$\theta = atan2\frac{a}{\pm\sqrt{1-a^2}} \tag{2-562}$$

2. Nếu

$$cos\theta = b \tag{2-563}$$

Thì, chúng ta có hai đáp án: θ và $-\theta$.

$$\theta = atan2\frac{\pm\sqrt{1-b^2}}{b} \tag{2-564}$$

3. Nếu

$$sin\theta = acos\theta = b \tag{2-565}$$

Thì,

$$\theta = atan2\frac{a}{b}. \tag{2-566}$$

4. Nếu

$$acos\theta + bsin\theta = 0 \tag{2-567}$$

Thì, chúng ta có hai đáp án: θ và $\pi + \theta$.

$$\theta = atan2\frac{a}{b}\theta = atan2\frac{-a}{-b} \tag{2-568}$$

5. Nếu

$$acos\theta + bsin\theta = c \tag{2-569}$$

Thì,

$$\theta = atan2\frac{a}{b} + atan2\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}. \tag{2-570}$$

6. Nếu

$$\begin{aligned} acos\theta + bsin\theta &= c \\ acos\theta - bsin\theta &= d \end{aligned} \tag{2-571}$$

Thì,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 + d^2 \\ \theta &= atan2\frac{ac-bd}{ad+bc}. \end{aligned} \tag{2-572}$$

7. Nếu

$$sin\theta sin\varphi = acos\theta sin\varphi = b \tag{2-573}$$

Thì, chúng ta có hai đáp án: θ và $\pi + \theta$.

$$\theta = atan2\frac{a}{b}\theta = atan2\frac{-a}{-b} \tag{2-574}$$

8. Nếu

$$sin\theta sin\varphi = acos\theta sin\varphi = bcos\varphi = c \tag{2-575}$$

Thì, chúng ta có hai đáp án cho θ và φ: θ tương ứng với φ, và $\theta + \pi$ tương ứng với $-\varphi$.

$$\begin{gathered}\theta = atan2\frac{a}{b}\theta = atan2\frac{-a}{-b} \\ \varphi = atan2\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\ \varphi = atan2\frac{-\sqrt{a^2+b^2}}{c}\end{gathered} \tag{2-576}$$

2.6.2. Phương pháp biến đổi ngược

Giả sử chúng ta có ma trận biến đổi T_6^0 biểu thị vị trí và hướng của cơ cấu chấp hành cuối cùng của một robot 6 DOF trong hệ toạ độ gốc B_0. Hơn nữa, giả sử hình học và các ma trận biến đổi riêng lẻ $T_1^0(q_1)$, $T_2^1(q_2), T_3^2(q_3), T_4^3(q_4), T_5^4(q_5)$ và $T_6^5(q_6)$ được đưa ra như là các hàm của các biến khớp.

Theo động học thuận,

$$T_6^0 = T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3T_5^4T_6^5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-577}$$

Chúng ta có thể giải quyết bài toán động học ngược bằng cách giải các phương trình sau cho các biến khớp chưa biết:

$$\begin{gathered}T_6^1 = (T_1^0)^{-1}T_6^0 \\ T_6^2 = (T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 \\ T_6^3 = (T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 \\ T_6^4 = (T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 \\ T_6^5 = (T_5^4)^{-1}(T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 \\ I = (T_6^5)^{-1}(T_5^4)^{-1}(T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0\end{gathered} \tag{2-578}$$

Chứng minh:

Chúng ta nhân cả hai vế của ma trận biến đổi T_6^0 với ma trận nghịch đảo $(T_1^0)^{-1}$ để thu được:

$$(T_1^0)^{-1}T_6^0 = (T_1^0)^{-1}\left(T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3T_5^4T_6^5\right) = T_6^1 \tag{2-579}$$

Lưu ý rằng $(T_1^0)^{-1}$ là nghịch đảo toán học của ma trận 4 × 4, T_1^0và không phải là một phép biến đổi nghịch đảo. Do đó, $(T_1^0)^{-1}$ phải được tính bằng phép nghịch đảo ma trận toán học.

Vế trái của Phương trình (2-579) là một hàm của q_1. Tuy nhiên, các phần tử của ma trận T_6^1 ở vế phải có thể là 0, hằng số hoặc là các hàm của q_2, q_3, q_4, q_5 và q_6. Các phần tử 0 hoặc hằng số của vế phải đưa ra phương trình đại số cần giải cho q_1.

Sau đó, ta nhân hai vế của phương trình (2-579) với $(T_2^1)^{-1}$ như sau:

$$(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 = (T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}(T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3T_5^4T_6^5) = T_6^2 \quad (2\text{-}580)$$

Vế trái của phương trình này là một hàm của q_2 trong khi các phần tử của ma trận T_6^2 ở phía phải có thể là 0, hằng số hoặc là các hàm của q_3, q_4, q_5 và q_6. Việc gán các phần tử liên quan với các phần tử hằng số hoặc 0 ở vế phải đưa ra phương trình đại số cần giải cho q_2.

Theo quy trình này, chúng ta có thể tìm được các biến khớp q_3, q_4, q_5 và q_6 bằng cách sử dụng các phương trình sau đây tương ứng.

$$(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 = (T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}(T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3T_5^4T_6^5) = T_6^3 \quad (2\text{-}581)$$

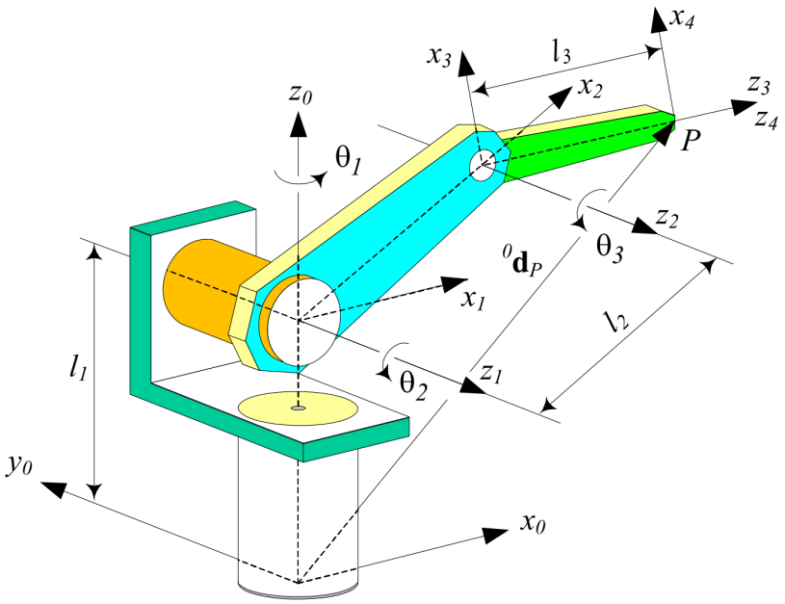
$$(T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 = (T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}(T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3T_5^4T_6^5) = T_6^4 \quad (2\text{-}582)$$

$$(T_5^4)^{-1}(T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 = (T_5^4)^{-1}(T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}(T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3T_5^4T_6^5) = T_6^5 \quad (2\text{-}583)$$

$$(T_6^5)^{-1}(T_5^4)^{-1}(T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}T_6^0 = (T_6^5)^{-1}(T_5^4)^{-1}(T_4^3)^{-1}(T_3^2)^{-1}(T_2^1)^{-1}(T_1^0)^{-1}\left(T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3T_5^4T_6^5\right) = I \quad (2\text{-}584)$$

Phương pháp biến đổi ngược còn được gọi là phương pháp Pieper [7].

Ví dụ 2-114: Xét một tay máy robot đa khớp như được hiển thị trong Hình 2-90.



Hình 2-90 Cánh tay robot dạng khớp nối.

Ma trận biến đổi giữa các khung tọa độ của nó là:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & -cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}585)$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2 cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}586)$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 0 \\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}587)$$

Động học thuận của tay máy là:

$$T_3^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 c(\theta_2+\theta_3) & s\theta_1 & c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_2 c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & -c\theta_1 & s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_2 c\theta_2 s\theta_1 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & l_1 + l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}588)$$

Điểm P được cho là điểm mà chúng ta gắn một cổ tay cầu. Do đó, chúng ta gắn một khung tọa độ B_4 tại P, nằm cách khung tọa độ B_3 một khoảng cách cố định l_3.

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}589)$$

Vì vậy động học thuận tổng thể của tay máy là:

$$T_4^0 = T_3^0 T_4^3$$
$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & s\theta_1 & c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_3 s(\theta_2+\theta_3) c\theta_1 + l_2 c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & -c\theta_1 & s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & l_3 s(\theta_2+\theta_3) s\theta_1 + l_2 c\theta_2 s\theta_1 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & l_1 - l_3 c(\theta_2+\theta_3) + l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}590)$$

Sử dụng các kích thước sau đây:

$$l_1 = 1\,m \quad l_2 = 1.05\,m \quad l_3 = 0.89\,m \quad (2\text{-}591)$$

Khi điểm tác động cuối tại:

$$d_P^0 = [1 \quad 1.1 \quad 1.2]^T \quad (2\text{-}592)$$

Động học thuận giảm thành ma trận dưới đây:

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & s\theta_1 & c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & 1 \\ s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) & -c\theta_1 & s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) & 1.1 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}593)$$

Nhân cả hai vế với $(T_1^0)^{-1}$

$$(T_1^0)^{-1}T_4^0 = (T_1^0)^{-1}(T_1^0T_2^1T_3^2T_4^3) = T_4^1 \quad (2\text{-}594)$$

Trong đó,

$$(T_1^0)^{-1}T_4^0 = T_4^1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & sin\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ sin\theta_1 & -cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_4^0$$
$$= \begin{bmatrix} c(\theta_2+\theta_3) & 0 & s(\theta_2+\theta_3) & c\theta_1 + 1.1s\theta_1 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & s\theta_1 - 1.1c\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}595)$$

Và

$$T_2^1T_3^2T_4^3 = \begin{bmatrix} c(\theta_2+\theta_3) & 0 & s(\theta_2+\theta_3) & 1.2s(\theta_2+\theta_3) + 1.1c\theta_2 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & 1.1s\theta_2 - 1.2c(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}596)$$

Cột cuối cùng của vế trái của (2-594) chỉ là một hàm của θ_1 trong khi vế phải là một hàm của θ_2 và θ_3. So sánh phần tử r_{24} của cả hai vế của (2-594) cung cấp một phương trình để xác định θ_1.

$$sin\theta_1 - 1.1cos\theta_1 = 0 \quad (2\text{-}597)$$

$$\theta_1 = atan2(1.1,1) = tan^{-1}\frac{1.1}{1} = 0.8329812667\ rad \approx 47.72631098 \text{ độ} \quad (2\text{-}598)$$

Thay thế $\theta_1 = 0.83298\ rad$ vào (2-595) cho ra ma trận T_4^1 với các giá trị số trong cột cuối cùng.

$$T_4^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_2+\theta_3) & 0 & s(\theta_2+\theta_3) & 1.4866 \\ s(\theta_2+\theta_3) & 0 & -c(\theta_2+\theta_3) & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}599)$$

Ta nhân cả hai vế của (2-599) với $(T_2^1)^{-1}$ ta có:

$$(T_2^1)^{-1}T_4^1 = (T_2^1)^{-1}(T_2^1T_3^2T_4^3) = T_4^2 \quad (2\text{-}600)$$

Trong đó,

$$(T_2^1)^{-1}T_4^1 = T_4^2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & sin\theta_2 & 0 & -1.05 \\ -sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_4^1$$
$$= \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 1.4866cos\theta_2 + 0.2sin\theta_2 - 1.05 \\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0.2cos\theta_2 - 1.4866sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}601)$$

Và

$$T_3^2 T_4^3 = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 0.89sin\theta_3 \\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & -0.89cos\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}602)$$

Bình phương các phần tử r_{14} và r_{24} của vế trái của (2-602), đưa ra một phương trình để xác định θ_2.

$$(1.4866cos\theta_2 + 0.2sin\theta_2 - 1.05)^2 + (0.2cos\theta_2 - 1.4866sin\theta_2)^2 = (0.89sin\theta_3)^2 + (-0.89cos\theta_3)^2 \quad (2\text{-}603)$$

$$3.941cos\theta_2 + 0.53sin\theta_2 = 5.232 \quad (2\text{-}604)$$

Sau khi có giá trị của θ_2, chúng ta có thể tính toán θ_3 từ cột cuối cùng của (2-602) và (2-601).

$$\theta_3 = atan2\left(\frac{1.4866cos\theta_2 + 0.2sin\theta_2 - 1.05}{0.2cos\theta_2 - 1.4866sin\theta_2}\right) \quad (2\text{-}605)$$

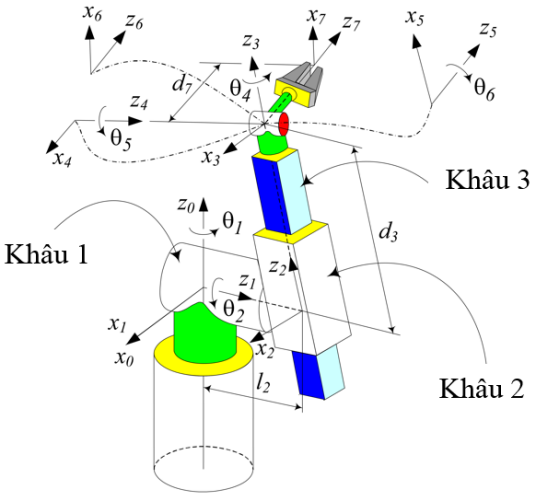
Nếu $\theta_2 = 0.755\, rad$ thì ta có:

$$\theta_3 = atan2(-0.19437) = -0.19198\, rad \approx -11 \text{ độ} \quad (2\text{-}606)$$

Nếu $\theta_2 = -0.488\, rad$ thì ta có:

$$\theta_3 = atan2(0.19437) = 0.19198\, rad \approx 11 \text{ độ} \quad (2\text{-}607)$$

Ví dụ 2-115: Động học ngược robot cầu



Hình 2-91 Robot cầu được cấu thành từ một cánh tay cầu được gắn vào một cổ tay cầu [1].

Ma trận biến đổi của robot cầu được hiển thị trong Hình 2-91 là

$$
{}^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}608)
$$

$$
{}^4T_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Vì vậy, vị trí và hướng của khâu chấp hành cuối (end-effector) cho một tập biến khớp, giải quyết vấn đề động học thuận, có thể được xác định bằng phép nhân ma trận.

$$
\begin{aligned} {}^0T_6 &= {}^0T_1\ {}^1T_2\ {}_2T_3\ {}^3T_4\ {}^4T_5\ {}^5T_6 \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (2\text{-}609)
$$

Trong đó, những phần tử của ${}^0T_6$ là giống như các phần tử của ma trận trong Phương trình (2-462).

Nhân cả hai vế của phương trình (2-609) với ${}^0T_1^{-1}$ ta có

$$
\begin{aligned} {}^0T_1^{-1}{}^0T_6 &= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & sin\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (2\text{-}610)
$$

Trong đó

$$\begin{aligned} f_{1i} &= r_{1i}cos\theta_1 + r_{2i}sin\theta_1 \\ f_{2i} &= -r_{3i} \\ f_{3i} &= r_{2i}cos\theta_1 - r_{1i}sin\theta_1 \\ i &= 1,2,3,4. \end{aligned} \quad (2\text{-}611)$$

Dựa trên các ma trận biến đổi được cung cấp, chúng ta thấy rằng

$$^1T_6 = {}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6 \quad (2\text{-}612)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}613)$$

$$f_{11} = -c\theta_2 s\theta_4 s\theta_6 + c\theta_6(-s\theta_2 s\theta_5 + c\theta_2 c\theta_4 c\theta_5) \quad (2\text{-}612)$$

$$f_{21} = -s\theta_2 s\theta_4 s\theta_6 + c\theta_6(c\theta_2 s\theta_5 + c\theta_4 c\theta_5 s\theta_2) \quad (2\text{-}613)$$

$$f_{31} = c\theta_4 s\theta_6 + c\theta_5 c\theta_6 s\theta_4 \quad (2\text{-}614)$$

$$f_{12} = -c\theta_2 c\theta_6 s\theta_4 - s\theta_6(-s\theta_2 s\theta_5 + c\theta_2 c\theta_4 c\theta_5) \quad (2\text{-}615)$$

$$f_{22} = -c\theta_6 s\theta_2 s\theta_4 - s\theta_6(c\theta_2 s\theta_5 + c\theta_4 c\theta_5 s\theta_2) \quad (2\text{-}616)$$

$$f_{32} = c\theta_4 c\theta_6 - c\theta_5 s\theta_4 s\theta_6 \quad (2\text{-}617)$$

$$f_{13} = c\theta_5 s\theta_2 + c\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 \quad (2\text{-}618)$$

$$f_{23} = -c\theta_2 c\theta_5 + c\theta_4 s\theta_2 s\theta_5 \quad (2\text{-}619)$$

$$f_{33} = s\theta_4 s\theta_5 \quad (2\text{-}620)$$

$$f_{14} = d_3 s\theta_2 \quad (2\text{-}621)$$

$$f_{24} = -d_3 c\theta_2 \quad (2\text{-}622)$$

Phần tử duy nhất không đổi của ma trận(2-613) là $f_{34} = l_2$, do đó,

$$r_{24}cos\theta_1 - r_{14}sin\theta_1 = l_2 \quad (2\text{-}623)$$

Loại phương trình lượng giác này thường xuyên xuất hiện trong động học ngược của robot, là một phương pháp giải quyết có hệ thống. Chúng ta giả sử

$$\begin{aligned} r_{14} &= rcos\phi \\ r_{24} &= rsin\phi \end{aligned} \quad (2\text{-}624)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r_{14}^2 + r_{24}^2} \\ \phi &= tan^{-1}\frac{r_{24}}{r_{14}} \end{aligned} \quad (2\text{-}625)$$

và do đó, Phương trình (2-623) trở thành

$$\frac{l_2}{r} = sin\phi cos\theta_1 - cos\phi sin\theta_1 = sin(\phi - \theta_1) \quad (2\text{-}626)$$

cho thấy rằng

$$\pm\sqrt{1-(l_2/r)^2} = cos(\phi - \theta_1) \quad (2\text{-}627)$$

Vì vậy, giải pháp của Phương trình (2-623) cho θ_1 là

$$\theta_1 = tan^{-1}\frac{r_{24}}{r_{14}} - tan^{-1}\frac{l_2}{\pm\sqrt{r^2 - l_2^2}} \quad (2\text{-}628)$$

Ký hiệu (-) tương ứng với cấu hình vai trái của robot như được thể hiện trong Hình 2-92, và ký hiệu (+) tương ứng với cấu hình vai phải.

Các phần tử f_{14} và f_{24} của ma trận (2-613) là các hàm của θ_1 và θ_2 mà thôi.

$$f_{14} = d_3 sin\theta_2 = r_{14}cos\theta_1 + r_{24}sin\theta_1 \quad (2\text{-}629)$$

$$f_{24} = -d_3 cos\theta_2 = -r_{34} \quad (2\text{-}630)$$

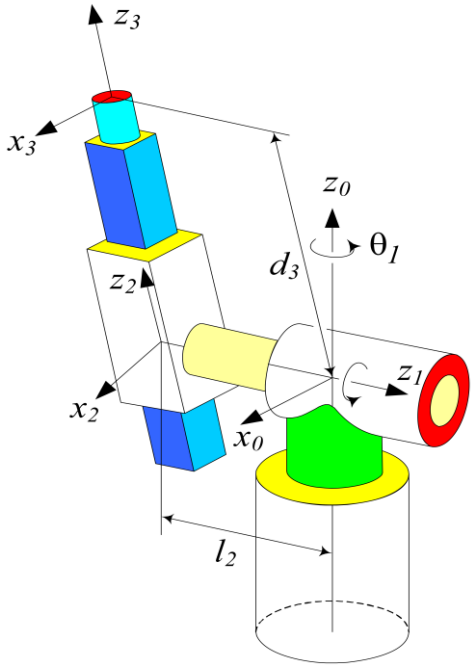
Do đó, có thể tìm θ_2.

$$\theta_2 = tan^{-1}\frac{r_{14}cos\theta_1 + r_{24}sin\theta_1}{r_{34}} \quad (2\text{-}631)$$

Trong đó θ_1 phải được thay thế từ (2-628).

Trong bước tiếp theo, chúng ta tìm biến thứ ba của khớp d_3 từ

$${}^1T_2^{-10}T_1^{-10}T_6 = {}^2T_6 \quad (2\text{-}632)$$



Hình 2-92 Cấu hình vai trái của robot cầu.

Trong đó

$$ {}^{1}T_{2}^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_2 \\ sin\theta_2 & -cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}633) $$

và

$$ {}^{2}T_{6} = \begin{bmatrix} -s\theta_4 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 & -c\theta_6 s\theta_4 - c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ c\theta_4 s\theta_6 + c\theta_5 c\theta_6 s\theta_4 & c\theta_4 c\theta_6 - c\theta_5 s\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ -c\theta_6 s\theta_5 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}634) $$

Sử dụng các phần tử của các ma trận ở cả hai vế của Phương trình (2-632) cho thấy rằng phần tử (3,4) có thể được sử dụng để tìm d_3.

$$ d_3 = r_{34}cos\theta_2 + r_{14}cos\theta_1 sin\theta_2 + r_{24}sin\theta_1 sin\theta_2 \quad (2\text{-}635) $$

Vì không có yếu tố nào khác trong Phương trình (2-632) phụ thuộc vào một biến đơn khác, chúng ta tiếp tục sang bước tiếp theo và tính giá trị của θ_4 từ

$$ {}^{3}T_{4}^{-12}T_{3}^{-11}T_{2}^{-10}T_{1}^{-1}\,{}^{0}T_{6} = {}^{4}T_{6} \quad (2\text{-}636) $$

Vì ${}^{2}T_{3}^{-1}\,{}^{1}T_{2}^{-10}T_{1}^{-10}T_{6} = {}^{3}T_{6}$ không tạo phương trình mới. Đánh giá ${}^{4}T_{6}$.

$$ {}^{4}T_{6} = \begin{bmatrix} cos\theta_5 cos\theta_6 & -cos\theta_5 sin\theta_6 & sin\theta_5 & 0 \\ cos\theta_6 sin\theta_5 & -sin\theta_5 sin\theta_6 & -cos\theta_5 & 0 \\ sin\theta_6 & cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}637) $$

và phần bên trái của (2-636) sử dụng

$$ {}^{2}T_{3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}638) $$

Và

$$ {}^{3}T_{4}^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta_4 & sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -sin\theta_4 & cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}639) $$

cho thấy rằng

$$ {}^{3}T_{4}^{-12}T_{3}^{-11}T_{2}^{-10}T_{1}^{-10}T_{6} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}640) $$

Trong đó

$$ \begin{aligned} g_{1i} = {} & -r_{3i}c\theta_4 s\theta_2 + r_{2i}(c\theta_1 s\theta_4 + c\theta_2 c\theta_4 s\theta_1) \\ & + r_{1i}(-s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4) \\ g_{2i} = {} & d_3\delta_{4i} - r_{31}c\theta_2 - r_{11}c\theta_1 s\theta_2 - r_{21}s\theta_1 s\theta_2 \\ g_{3i} = {} & r_{31}s\theta_2 s\theta_4 + r_{21}(c\theta_1 c\theta_4 - c\theta_2 s\theta_1 s\theta_4) \\ & + r_{11}(-c\theta_4 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_2 s\theta_4) \\ i = {} & 1,2,3,4. \end{aligned} \quad (2\text{-}641) $$

Ký hiệu δ_{4i} xác định delta Kronecker và là:

$$\delta_{4i} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = 4 \\ 0 & \text{nếu } i \neq 4 \end{cases} \quad (2\text{-}642)$$

Do đó, chúng ta có thể tìm được θ_4 bằng cách làm cho phần tử (3, 3) bằng nhau, θ_5 bằng cách làm cho các phần tử (1, 3) hoặc (2, 3) bằng nhau, và θ_6 bằng cách làm cho các phần tử (3, 1) hoặc (3, 2) bằng nhau. Bắt đầu từ phần tử (3, 3).

$$r_{13}(-c\theta_4 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_2 s\theta_4) + r_{23}(c\theta_1 c\theta_4 - c\theta_2 s\theta_1 s\theta_4) + r_{33} s\theta_2 s\theta_4 = 0 \quad (2\text{-}643)$$

Ta tìm được

$$\theta_4 = tan^{-1} \frac{-r_{13} s\theta_1 + r_{23} c\theta_1}{c\theta_2 (r_{13} c\theta_1 + r_{23} s\theta_1) - r_{33} s\theta_2} \quad (2\text{-}644)$$

Dựa trên giá trị thứ hai của θ_1, cũng có thể bằng

$$\theta_4 = \frac{\pi}{2} + tan^{-1} \frac{-r_{13} s\theta_1 + r_{23} c\theta_1}{c\theta_2 (r_{13} c\theta_1 + r_{23} s\theta_1) - r_{33} s\theta_2} \quad (2\text{-}645)$$

Bây giờ chúng ta sử dụng các phần tử (1,3) và (2,3).

$$\begin{aligned} sin\theta_5 = \; & r_{23}(cos\theta_1 sin\theta_4 + cos\theta_2 cos\theta_4 sin\theta_1) - r_{33} cos\theta_4 sin\theta_2 \\ & + r_{13}(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_4 - sin\theta_1 sin\theta_4) \\ -cos\theta_5 = \; & -r_{33} cos\theta_2 - r_{13} cos\theta_1 sin\theta_2 - r_{23} sin\theta_1 sin\theta_2 \end{aligned} \quad (2\text{-}646)$$

Tìm θ_5

$$\theta_5 = tan^{-1} \frac{sin\theta_5}{cos\theta_5} \quad (2\text{-}647)$$

Cuối cùng, θ_6 có thể được tìm thấy từ các phần tử (3,1) và (3,2).

$$\begin{aligned} & sin\theta_6 = r_{31} sin\theta_2 sin\theta_4 + r_{21}(cos\theta_1 cos\theta_4 - cos\theta_2 sin\theta_1 sin\theta_4) \\ & + r_{11}(-cos\theta_4 sin\theta_1 - cos\theta_1 cos\theta_2 sin\theta_4) \\ & cos\theta_6 = r_{32} sin\theta_2 sin\theta_4 + | \; r_{22}(cos\theta_1 cos\theta_4 - cos\theta_2 sin\theta_1 sin\theta_4) \\ & + r_{12}(-cos\theta_4 sin\theta_1 - cos\theta_1 cos\theta_2 sin\theta_4) \\ & \theta_6 = tan^{-1} \frac{sin\theta_6}{cos\theta_6}. \end{aligned} \quad (2\text{-}648)$$

2.6.3. Phương pháp lặp

Bài toán động học ngược có thể được hiểu như việc tìm kiếm giải pháp q_k của một hệ phương trình đại số phi tuyến.

$$T_n^0 = T(q) = T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) T_3^2(q_3) T_4^3(q_4) \ldots T_n^{n-1}(q_n) \quad (2\text{-}649)$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hoặc

$$r_{ij} = r_{ij}(q_k) \quad k = 1,2, \ldots n \quad (2\text{-}650)$$

Trong đó, n là số bậc tự do. Tuy nhiên, tối đa $m = 6$ trên tổng số 12 phương trình của (2-649) là độc lập và có thể được sử dụng để giải cho các biến khớp q_k. Các hàm $T(q)$ là siêu hàm, được xác định cụ thể dựa trên phân tích động học thuận.

Có nhiều phương pháp để tìm các giá trị 0 của Phương trình (2-649). Tuy nhiên, các phương pháp này, nói chung, là phương pháp lặp. Phương pháp phổ biến nhất được biết đến là phương pháp Newton-Raphson.

Trong phương pháp lặp, để giải các phương trình động học

$$T(q) = 0 \tag{2-651}$$

đối với các biến q, chúng ta bắt đầu bằng một giả định ban đầu

$$q^* = q + \delta q \tag{2-652}$$

Đối với các biến khớp. Sử dụng động học thuận, chúng ta có thể xác định cấu hình của khung tọa độ khâu chấp hành cuối cho các biến khớp đã dự đoán.

$$T^* = T(q^*) \tag{2-653}$$

Sự khác biệt giữa cấu hình được tính toán bằng động học thuận và cấu hình mong muốn thể hiện bằng một sai số, được gọi là dư thừa, cần được tối thiểu hóa.

$$\delta T = T - T^* \tag{2-654}$$

Phương trình bậc nhất Taylor mở rộng của tập phương trình là:

$$T = T(q^* + \delta q) = T(q^*) + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + O(\delta q^2) \tag{2-655}$$

Giả sử $\delta q << I$ cho phép chúng ta làm việc với một tập các phương trình tuyến tính.

$$\delta T = J\delta q \tag{2-656}$$

trong đó J là ma trận Jacobian của tập hợp các phương trình.

$$J(q) = \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\right] \tag{2-657}$$

Nghĩa là,

$$\delta T = J^{-1}\delta T \tag{2-658}$$

Do đó, các biến q không biết là:

$$q = q^* + J^{-1}\delta T \tag{2-659}$$

Chúng ta có thể sử dụng các giá trị thu được bằng (2-659) làm ước lượng mới để lặp lại các tính toán và tìm ra các giá trị mới. Việc lặp lại có thể được tóm tắt trong phương trình lặp sau để tiến tới giá trị chính xác của các biến.

$$q^{(i+1)} = q^{(i)} + J^{-1}(q^{(i)})\delta T(q^{(i)}) \tag{2-660}$$

Phương pháp lặp này có thể được đưa vào một thuật toán để dễ dàng tính toán số học.

Thuật toán 1. Phương pháp lặp động học ngược

1. Đặt $i = 0$ làm bước đếm ban đầu.

2. Tìm hoặc đoán một ước lượng ban đầu $q^{(0)}$

3. Tính toán hiệu số dư $\delta T\left(q^{(i)}\right) = J(q^{(i)})\delta q^{(i)}$.

Nếu mỗi phần tử của $T\left(q^{(i)}\right)$ hoặc giá trị chuẩn của nó $\left\|T\left(q^{(i)}\right)\right\|$ nhỏ hơn một ngưỡng chấp nhận, $\left\|T\left(q^{(i)}\right)\right\| < \epsilon$ thì kết thúc quá trình lặp. $q^{(i)}$ là giải pháp mong muốn.

4. Tính $q^{(i+1)} = q^{(i)} + J^{-1}(q^{(i)})\delta T(q^{(i)})$

5. Đặt $i = i + 1$ và quay lại bước 3.

Ngưỡng chấp nhận ϵ có thể được thiết lập tương đương với các biến.

$$q^{(i+1)} - q^{(i)} < \epsilon$$

Hoặc với Jacobian

$$J - I < \epsilon$$

Ví dụ 2-116: Động học ngược đối với tay máy 2 khớp quay (2R) trong mặt phẳng.

Ta đã biết điểm tác động cuối của tay máy 2R trong mặt phẳng có thể được mô tả bằng công thức

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}661)$$

Để giải bài toán động học ngược của tay máy và tìm tọa độ của các khớp cho một vị trí đã biết của điểm tác động cuối của tay máy, ta xác định

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}662)$$

$$T = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2\text{-}663)$$

Vì vậy, Jacobian của các phương trình là:

$$J(q) = \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}664)$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 - l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Nghịch đảo của Jacobian là:

$$J^{-1} = \frac{-1}{l_1 l_2 s\theta_2}\begin{bmatrix} -l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}665)$$

và do đó, công thức lặp (2-660) được thiết lập như sau:

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}^{(i+1)} = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}^{(i)} + J^{-1}\left(\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}^{(i)}\right) \tag{2-666}$$

Giả sử

$$l_1 = l_2 = 1 \tag{2-667}$$

$$T = \begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{2-668}$$

và bắt đầu từ một giá trị đoán ban đầu

$$q^{(0)} = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix}\pi/3\\ -\pi/3\end{bmatrix} \tag{2-669}$$

với giả định rằng

$$\begin{aligned}\delta T &= \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}cos(\frac{\pi}{3}) + cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1\sqrt{3}}{2} + 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-670}$$

Jacobian và ma trận nghịch đảo của nó cho các giá trị này là:

$$J = \begin{bmatrix}-\frac{1\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix} \tag{2-671}$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix} \tag{2-672}$$

Và do đó,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}^{(1)} &= \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}^{(0)} + J^{-1}\,\delta T\\ &= \begin{bmatrix}\pi/3\\ -\pi/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1\sqrt{3}}{2} + 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1.6245\\ -1.7792\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-673}$$

Dựa vào phương pháp lặp, chúng ta có thể tìm các giá trị sau và tìm được đáp án trong vài lần lặp.

Lần lặp 1.

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}674)$$

$$\delta T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1\sqrt{3}}{2} + 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}675)$$

$$q^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.6245 \\ -1.7792 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}676)$$

Lần lặp 2.

$$J = \begin{bmatrix} -0.844 & 0.154 \\ 0.934 & 0.988 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}677)$$

$$\delta T = \begin{bmatrix} 6.516 \times 10^{-2} \\ 0.15553 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}678)$$

$$q^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.583 \\ -1.582 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}679)$$

Lần lặp 3.

$$J = \begin{bmatrix} -1.00 & -0.433 \times 10^{-3} \\ 0.988 & 0.999 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}680)$$

$$\delta T = \begin{bmatrix} 0.119 \times 10^{-1} \\ -0.362 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}681)$$

$$q^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.570795886 \\ -1.570867014 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}682)$$

Lần lặp 4.

$$J = \begin{bmatrix} -1.000 & 0.0 \\ 0.98850 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}683)$$

$$\delta T = \begin{bmatrix} -0.438 \times 10^{-6} \\ -0.711 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}684)$$

$$q^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.570796329 \\ -1.570796329 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}685)$$

Kết quả của lần lặp thứ 4 $q^{(4)}$ gần đúng với giá trị chính xác

$$q = [\pi/2 \quad -\pi/2]^T \quad (2\text{-}686)$$

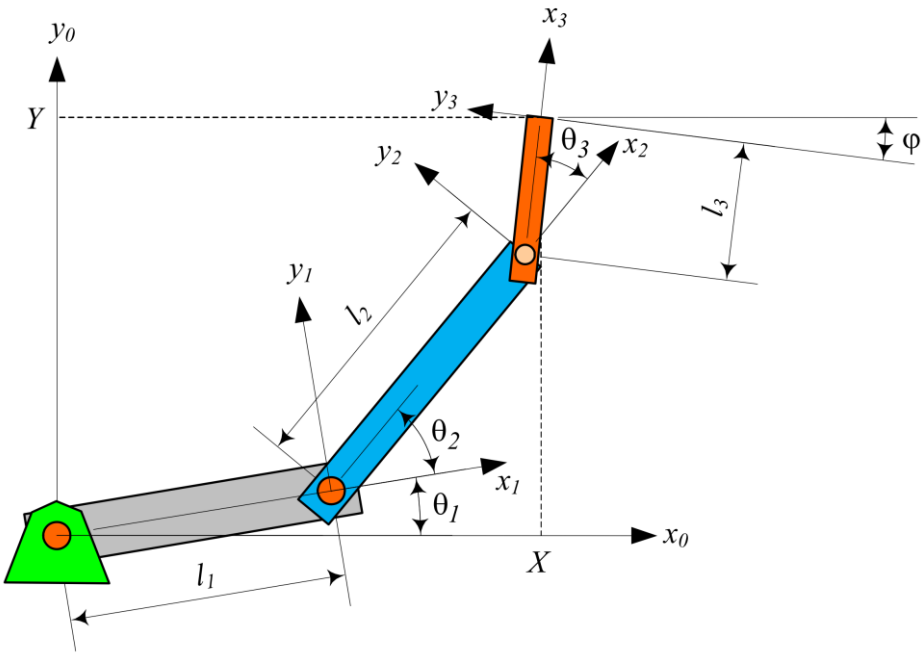
2.6.4. Bài tập

1. Hình 2-93 minh họa một bộ canh tay robot phẳng $R \parallel R \parallel R$. Động học thuận của cánh tay robot tạo ra các ma trận sau. Giải bài toán động học ngược và tìm giá trị $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ cho các tọa độ đã cho x_0, y_0 của điểm tác động cuối và một giá trị đã cho của φ.

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 2-93 Cánh tay robot phẳng $R \parallel R \parallel R$.

2. Điểm tác động cuối của tay máy 2R trên một đường đi ngang.

Xem xét một cánh tay robot phẳng 2R với độ dài $l_1 = l_2 = 1$. Điểm tác động cuối đang di chuyển trên một đường thẳng từ $P_1(1{,}1.5)$ đến $P_2(-1{,}1.5)$.

a. Chia đường đi Descartes thành 10 phần bằng nhau và xác định các biến khớp tại 11 điểm.

b. Tính toán biến khớp θ_1 tại điểm P_1 và tại điểm P_2. Chia phạm vi của θ_1 thành 10 phần bằng nhau và xác định tọa độ của điểm tác động cuối tại 11 giá trị của θ_1.

c. Tính toán biến khớp θ_2 tại P_1 và tại P_2. Chia phạm vi của θ_1 thành 10 phần bằng nhau và xác định tọa độ điểm tác động cuối tại 11 giá trị của θ_2.

3. Điểm tác động cuối của tay máy 2R trên một đường đi nghiêng.

Xem xét một cánh tay robot phẳng 2R với khuỷu tay lên và có độ dài $l_1 = l_2 = 1$. Điểm tác động cuối đang di chuyển trên một đường thẳng từ $P_1(1,1.5)$ đến $P_2(-1,1)$.

a. Chia đường đi Descartes thành 10 phần bằng nhau và xác định các biến khớp tại 11 điểm.

b. Tính toán biến khớp θ_1 tại điểm P_1 và tại điểm P_2. Chia phạm vi của θ_1 thành 10 phần bằng nhau và xác định tọa độ của điểm tác động cuối tại 11 giá trị của θ_1.

c. Tính toán biến khớp θ_2 tại P_1 và tại P_2. Chia phạm vi của θ_1 thành 10 phần bằng nhau và xác định tọa độ điểm tác động cuối tại 11 giá trị của θ_2.

4. Chuyển động của tay máy 2R trên một đường đi ngang.

Xem xét một cánh tay robot phẳng 2R theo kế hoạch với độ dài $l_1 = l_2 = 1$. . Điểm tác động cuối đang di chuyển trên một đường thẳng từ $P_1(1,1.5)$ đến $P_2(-1,1.5)$ theo các hàm thời gian sau đây.

$$X = 1 - 6t^2 + 4t^3 \; Y = 1.5$$

a. Tính toán và vẽ đồ thị của θ_1 và θ_2 theo thời gian nếu thời gian chuyển động là $0 \leq t \leq 1$.

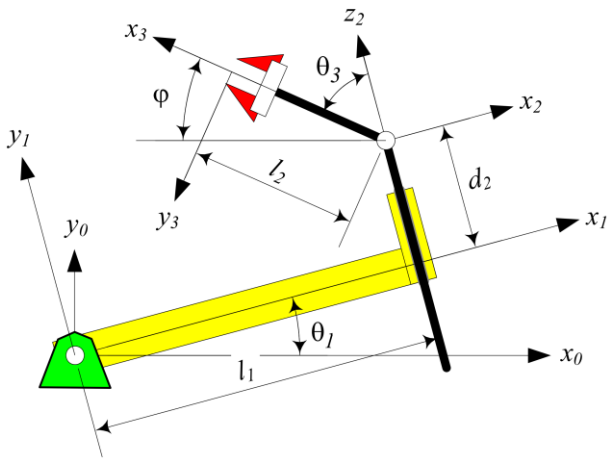
b. Tính toán và vẽ đồ thị của $\dot{\theta}_1$ và $\dot{\theta}_2$ theo thời gian.

c. Tính toán và vẽ đồ thị của $\ddot{\theta}_1$ và $\ddot{\theta}_2$ theo thời gian.

d. Tính toán và vẽ đồ thị của $\dddot{\theta}_1$ và $\dddot{\theta}_2$ theo thời gian.

5. Cánh tay robot phẳng

Trong Hình 2-94 minh họa một cánh tay robot phẳng có ba bậc tự do (DOF).



Hình 2-94 Cánh tay robot phẳng 3 bậc tự do.

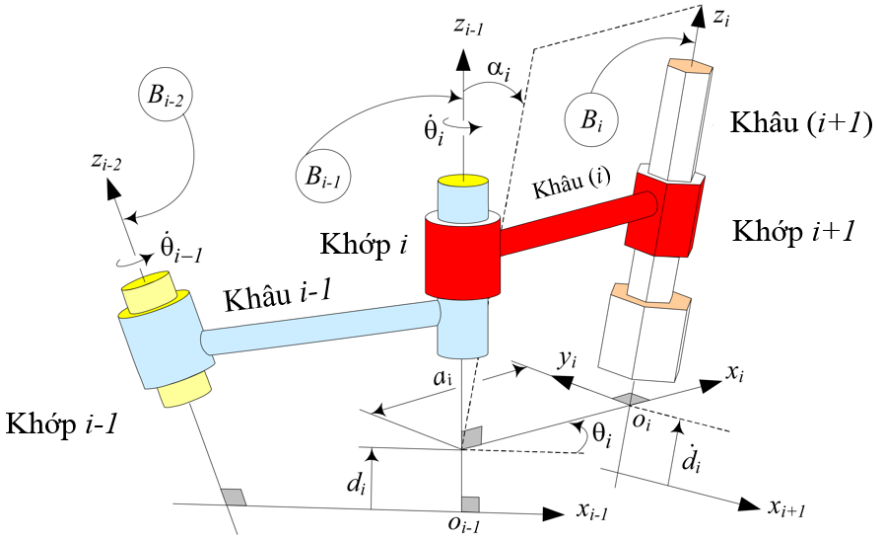
a. Xác định các ma trận biến đổi giữa các khung tọa độ.

b. Giải bài toán động học thuận và xác định các tọa độ X, Y, và φ của khung tọa độ khâu chấp hành cuối B_3 cho một bộ biến số khớp nhất định $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

c. Giải bài toán động học ngược và xác định các biến khớp $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ cho một tập hợp đã cho của tọa độ khâu chấp hành cuối X, Y và góc φ.

2.7. Động học vận tốc

Phân tích vận tốc của một robot được chia thành hai loại là động học vận tốc thuận và nghịch. Có thể nói rằng việc biết tốc độ thời gian của các biến khớp và xác định vận tốc Descartes của khâu chấp hành cuối trong khung tọa độ toàn cục là động học vận tốc thuận. Việc xác định tốc độ thời gian của các biến khớp dựa trên vận tốc của khâu chấp hành cuối là động học vận tốc nghịch.



Hình 2-95 Ba khâu với vận tốc tương đối [1].

2.7.1. Vận tốc khâu cứng

Mỗi khâu của một robot công nghiệp có một vận tốc góc ω hoặc một vận tốc dịch chuyển $\dot{d}$ so với các khâu liền kề của nó như được hiển thị trong Hình 2-95. Vận tốc góc của khâu (i) trong hệ tọa độ toàn cục B_0 là tổng của các vận tốc góc toàn cục của các khâu (j), cho $j \leq i$.

$$ {}^0_0\omega_i = \sum_{j=1}^{i} {}^0_{j-1}\omega_j \tag{2-687} $$

Trong đó

$$ {}^0_{j-1}\omega_j = \begin{cases} \dot{\theta}_j \, {}^0\hat{k}_{j-1} & \text{nếu khớp } i \text{ là } R \\ 0 & \text{nếu khớp } i \text{ là } P. \end{cases} \tag{2-688} $$

Tốc độ của gốc B_i đính kèm vào khâu (i) trong hệ tọa độ cơ sở là

$$ {}^0_{i-1}\dot{d}_i = \begin{cases} {}^0_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i & \text{nếu khớp } i \text{ là } R \\ \dot{d}_i \, {}^0\hat{k}_{i-1} + {}^0_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i & \text{nếu khớp } i \text{ là } P \end{cases} \tag{2-689} $$

Trong đó θ và d là các tham số DH, và d là vector vị trí gốc của khung tọa độ.

Vì vậy, nếu một robot có n khớp, vận tốc góc toàn cục của khung tọa độ cuối là

$$ {}^{0}_{0}\omega_n = \sum_{i=1}^{n} {}^{0}_{i-1}\omega_i \tag{2-690} $$

Và vector vận tốc toàn cục của hệ tọa độ của khung tọa độ của khâu cuối là

$$ {}^{0}_{0}\dot{d}_n = \sum_{i=1}^{n} {}^{0}_{i-1}\dot{d}_i \tag{2-691} $$

Ví dụ 2-117: Vận tốc góc của các khâu cứng dạng chuỗi.

Xem xét một cánh tay robot dạng chuỗi nối tiếp với n khâu và n khớp quay. Vận tốc góc toàn cục của khâu (i) theo vận tốc góc của các khâu trước đó là:

$$ {}^{0}\omega_i = {}^{0}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i \, {}^{0}\hat{k}_{i-1} \tag{2-692} $$

Hoặc

$$ {}^{0}\omega_i = \sum_{j=1}^{i} \dot{\theta}_j \, {}^{0}\hat{k}_{j-1} \tag{2-693} $$

Bởi vì

$$ {}^{0}_{i-1}\omega_i = \dot{\theta}_i \, {}^{0}\hat{k}_{i-1} \tag{2-694} $$

$$ {}^{0}_{i-2}\omega_{i-1} = \dot{\theta}_{i-1} \, {}^{0}\hat{k}_{i-2} \tag{2-695} $$

$$ \begin{aligned} {}^{0}_{i-2}\omega_i &= {}^{0}_{i-2}\omega_{i-1} + {}^{0}_{i-1}\omega_i = {}^{0}_{i-2}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i \, {}^{0}\hat{k}_{i-1} \\ &= \dot{\theta}_{i-1} \, {}^{0}\hat{k}_{i-2} + \dot{\theta}_i \, {}^{0}\hat{k}_{i-1} \end{aligned} \tag{2-696} $$

Và do đó,

$$ \begin{aligned} {}^{0}\omega_i &= \sum_{j=1}^{i-1} {}^{0}_{j-1}\omega_j + \dot{\theta}_i \, {}^{0}\hat{k}_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\theta}_j \, {}^{0}\hat{k}_{j-1} + \dot{\theta}_i \, {}^{0}\hat{k}_{i-1} \\ &= \sum_{j=1}^{i} \dot{\theta}_j \, {}^{0}\hat{k}_{j-1}. \end{aligned} \tag{2-697} $$

Ví dụ 2-118: Vận tốc thẳng của các khâu cứng dạng chuỗi.

Vận tốc góc toàn cục của khớp (i) trong một cánh tay robot dạng chuỗi nối tiếp dưới dạng vận tốc góc các khớp trước đó là

$$ {}^{0}v_i = {}^{0}v_{i-1} + {}^{0}_{i-1}\omega_i \times {}^{0}_{i-1}d_i \tag{2-698} $$

Trong đó

$$ {}^{0}v_i = {}^{0}\dot{d}_i \tag{2-699} $$

Hoặc

$$ {}^{0}v_i = \sum_{j=1}^{i} \mathrm{I}\left({}^{0}\hat{k}_{j-1} \times {}^{0}_{i-1}d_i \right)\dot{\theta}_j \tag{2-700} $$

Bởi vì

$$\begin{aligned} {}^0_0v_i &= {}_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i \\ {}_{i-2}v_{i-1} &= {}_0\omega_{i-1} \times {}^0_{i-2}d_{i-1} \\ {}^0_{i-2}v_i &= {}^0_{i-2}v_{i-1} + {}^0_{i-1}v_i = {}^0_{i-2}v_{i-1} + {}_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i \\ &= {}_0\omega_{i-1} \times {}^0_{i-2}d_{i-1} + {}_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i \\ &= \dot{\theta}_{i-1}\,{}^0\hat{k}_{i-2} \times {}^0_{i-2}d_{i-1} + \dot{\theta}_i\,{}^0\hat{k}_{i-1} \times {}^0_{i-1}d_i \end{aligned} \tag{2-701}$$

Và do đó,

$${}^0v_i = \sum_{j=1}^{i-1} {}^0_{j-1}v_j + {}^0_{i-1}v_i = \sum_{j=1}^{i} \left({}^0\hat{k}_{j-1} \times {}^0_{i-1}d_i\right)\dot{\theta}_j. \tag{2-702}$$

Ví dụ 2-119: Vận tốc đệ quy trong khung tọa độ cơ sở

Đạo hàm theo thời gian của ma trận biến đổi đồng nhất $[T]$ có thể được sắp xếp dưới dạng

$$\dot{T} = [V][T] \tag{2-703}$$

trong đó $[T]$ có thể là ma trận biến đổi khâu hoặc kết quả của động học thuận của robot như

$${}^0T_6 = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6 \tag{2-704}$$

Vì vậy, đạo hàm theo thời gian của ma trận biến đổi có thể được tính toán khi ma trận biến đổi vận tốc $[V]$ được tính toán.

Ma trận biến đổi ${}^0T_i$ là

$${}^0T_i = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3 \cdots {}^{i-1}T_i \tag{2-705}$$

và các ma trận ${}^0V_i$ và ${}^0V_{i+1}$ là

$${}^0V_i = {}^0\dot{T}_i\,{}^0T_i^{-1} \tag{2-706}$$

$$\begin{aligned} {}^0V_{i+1} &= {}^0\dot{T}_{i+1}\,{}^0T_{i+1}^{-1} = \frac{d}{dt}\left({}^0T_i\,{}^iT_{i+1}\right){}^0T_{i+1}^{-1} \\ &= \left({}^0T_i\,{}^i\dot{T}_{i+1} + {}^0\dot{T}_i\,{}^iT_{i+1}\right){}^0T_{i+1}^{-1}. \end{aligned} \tag{2-707}$$

Các phương trình này có thể được kết hợp thành một công thức đệ quy.

$${}^0V_{i+1} = {}^0V_i + {}^0\dot{T}_i\,{}^iV_{i+1}\,{}^0T_i^{-1}. \tag{2-708}$$

Công thức ma trận biến đổi tốc độ đệ quy có thể được đơn giản hóa tùy theo loại các khớp kết nối hai khâu.

Đối với một khớp xoay, ma trận biến đổi vận tốc là

$$\begin{aligned} {}^iV_{i+1} &= \dot{q}_{i+1}\Delta_R = \dot{\theta}_{i+1}\Delta_R \\ &= \dot{\theta}_{i+1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\theta}_{i+1}\begin{bmatrix} {}^{i-1}\tilde{k}_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-709}$$

Ta có

$$ {}_0\omega_{i+1} = {}_0\omega_i + {}^0_i\omega_{i+1} = {}_0\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^0_i\hat{k}_{i+1} \tag{2-710} $$

Điều này cho thấy rằng vận tốc góc của khung B_{i+1} là vận tốc góc của khung B_i cộng với vận tốc góc tương đối được tạo ra bởi biến khớp q_{i+1}.

$$ {}^0\dot{d}_{i+1} = {}^0\dot{d}_i + {}^0_i\dot{d}_{i+1} = {}^0\dot{d}_i + {}_0\tilde{\omega}_{i+1}({}^0d_{i+1} - {}^0d_i) \tag{2-711} $$

Điều này chỉ ra rằng vận tốc thẳng được xác định bằng cách cộng thêm vận tốc thẳng của khung B_i vào chuyển động quay của khâu B_{i+1}.

Đối với một khớp trượt, công thức ma trận hệ số vận tốc là

$$ \begin{aligned} {}^iV_{i+1} &= \dot{q}_{i+1}\Delta_P = \dot{d}_{i+1}\Delta_R \\ &= \dot{d}_{i+1}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} = \dot{d}_{i+1}\begin{bmatrix}0 & {}^{i-1}\hat{k}_{i-1}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-712} $$

Do đó, ta có

$$ \omega_{i+1} = \omega_i \tag{2-713} $$

và

$$ {}^0\dot{d}_{i+1} = {}^0\dot{d}_i + {}_0\tilde{\omega}_{i+1}({}^0d_{i+1} - {}^0d_i) + \dot{d}_{i+1}\,{}^0_i\hat{k}_{i+1} \tag{2-714} $$

Điều này cho thấy rằng vận tốc góc của khung tọa độ B_{i+1} là giống như vận tốc góc của khung tọa độ B_i. Hơn nữa, vận tốc thẳng được thu được bằng cách cộng vận tốc thẳng do $\dot{d}_{i+1}$ vào vận tốc tương đối do chuyển động quay của khâu B_{i+1}.

2.7.2. Động học vận tốc thuận

Động học vận tốc thuận của một robot giải quyết vấn đề liên quan giữa tốc độ của các khớp, q̇, với tốc độ của khâu chấp hành cuối Ẋ. Vector tốc độ của các khớp q̇, của một robot có n bậc tự do là một vector kích thước $n \times 1$.

$$ \dot{q} = [\dot{q}_n \quad \dot{q}_n \quad \dot{q}_n \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T \tag{2-715} $$

Vector vận tốc của khâu chấp hành cuối (end-effector) Ẋ, trong trường hợp tổng quát nhất, là một vector có kích thước 6×1.

$$ \begin{aligned} \dot{X} &= [\dot{X}_n \quad \dot{Y}_n \quad \dot{Z}_n \quad \omega_{Xn} \quad \omega_{Yn} \quad \omega_{Zn}]^T \\ &= \begin{bmatrix} {}^0\dot{d}_n \\ {}_0\omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0v_n \\ {}_0\omega_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-716} $$

Các thành phần của vector tốc độ của khâu chấp hành cuối Ẋ tuyến tính tương ứng với các thành phần của vector tốc độ của khớp, q̇,

$$ \dot{X} = J\dot{q} \tag{2-717} $$

Trong đó, ma trận tỷ lệ $6 \times n$ $J(q)$ được gọi là ma trận Jacobian của robot.

Biểu thức toàn cục của vận tốc ${}^0v_n$ của gốc B_n tỉ lệ thuận với tốc độ của các khớp cơ cấu $\dot{q}_D$.

$$ {}^0v_n = J_D\dot{q}_D,\ \dot{q}_D \in \dot{q} \tag{2-718}$$

Ma trận tương ứng $3 \times n$ $J_D(q)$ là ma trận Jacobi về sự dịch chuyển

$$ J_D = \frac{\partial d_n(\dot{q}_D)}{\partial \dot{q}_D} = \frac{\partial T(q)}{\partial q} \tag{2-719}$$

Biểu thức toàn cục của vận tốc góc ${}_0\omega_n$ của B_n tỉ lệ với các khâu xoay của $\dot{q}$.

$$ {}_0\omega_n = J_R\dot{q} \tag{2-720}$$

Ma trận tỷ lệ $3 \times n$ $J_R(q)$ là ma trận Jacobian xoay của robot.

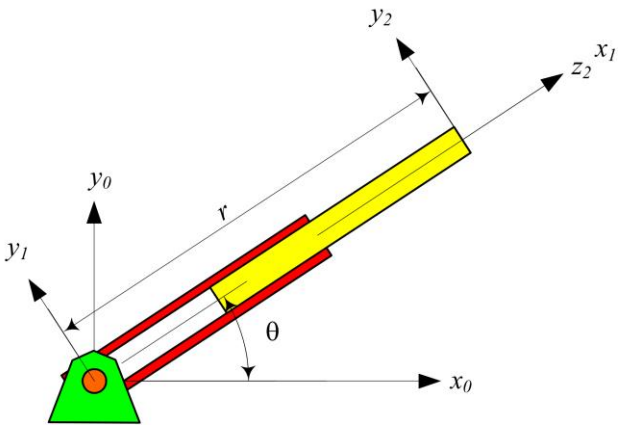
$$ J_R = \frac{\partial_0\omega_n}{\partial q} \tag{2-721}$$

Ta có thể kết hợp Công thức (2-718) và (2-720) để biểu diễn động học vận tốc thuận của một robot bằng (2-716).

Ví dụ 2-120: Ma trận Jacobian cho cánh tay robot phẳng.

Hình 2-96 mô tả một cánh tay robot phẳng phẳng với động học thuận như sau.

$$\begin{aligned} {}^0T_2 &= {}^0T_1\,{}^1T_2 \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & rcos\theta \\ sin\theta & cos\theta & 0 & rsin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-722}$$



Hình 2-96 Cánh tay robot phẳng.

Điểm tác động cuối của robot là tại:

$$ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rcos\theta \\ rsin\theta \end{bmatrix} \tag{2-723}$$

Và do đó, vận tốc của nó là:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} \tag{2-724}$$

Thấy rằng

$$J_D = \begin{bmatrix}\frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta}\\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{bmatrix} \tag{2-725}$$

Chỉ có một tọa độ khớp quay, θ. Ma trận quay ${}^0R_2$ cho biết rằng:

$${}_0\tilde{\omega}_2 = {}^0\dot{R}_2\,{}^0R_2^T = \dot{\theta}\tilde{k} \tag{2-726}$$

Vì vậy,

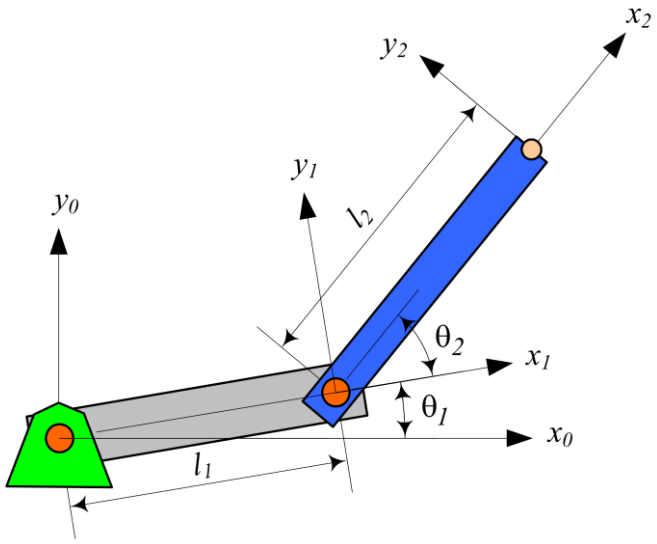
$${}_0\omega_2 = \begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} \tag{2-727}$$

Và do đó,

$$\begin{gathered}\omega_3 = J_R\dot{\theta}\\ J_R = 1\\ \begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\\ \omega_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{2-728}$$

Ví dụ 2-121: Ma trận Jacobian cho cánh tay robot hai khớp phẳng 2R.

Cánh tay robot hai khớp phẳng 2R với hai khớp $R \parallel R$ được minh họa trong Hình 2-97. Tay máy này đã được phân tích trong Ví dụ 2-75 cho động học thuận, và trong Ví dụ 2-107 Ví dụ 2-109 cho động học nghịch.



Hình 2-97 Cánh tay robot hai khớp phẳng 2R.

Vận tốc góc của các khâu (1) và (2) là

$$
\begin{aligned}
{}_0\omega_1 &= \dot{\theta}_1\, {}^0\hat{k}_0 \\
{}_1^0\omega_2 &= \dot{\theta}_2\, {}^0\hat{k}_1
\end{aligned}
\tag{2-729}
$$

và

$$
{}_0\omega_2 = {}_0\omega_1 + {}_1^0\omega_2 = \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) {}^0\hat{k}_0 \tag{2-730}
$$

Và tốc độ toàn cục của vị trí điểm tác động cuối của cánh tay robot là

$$
\begin{aligned}
{}^0\dot{d}_2 &= {}^0\dot{d}_1 + {}_1^0\dot{d}_2 = {}_0\omega_1 \times {}^0d_1 + {}_0\omega_2 \times {}_1^0d_2 \\
&= \dot{\theta}_1\, {}^0\hat{k}_0 \times l_1\, {}^0\hat{\imath}_1 + \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) {}^0\hat{k}_0 \times l_2\, {}^0\hat{\imath}_2 \\
&= l_1\dot{\theta}_1\, {}^0\hat{\jmath}_1 \times l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) {}^0\hat{\jmath}_2.
\end{aligned}
\tag{2-731}
$$

Các vector đơn vị ${}^0\hat{\jmath}_1$ và ${}^0\hat{\jmath}_2$ có thể được xác định bằng cách sử dụng phương pháp chuyển đổi tọa độ.

$$
\begin{aligned}
{}^0\hat{\jmath}_1 &= R_{Z,\theta_1}\, {}^1\hat{\jmath}_1 \\
&= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin\theta_1 \\ cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-732}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0\hat{\jmath}_2 &= R_{Z,\theta_1+\theta_2}\, {}^2\hat{\jmath}_2 \\
&= \begin{bmatrix} cos(\theta_1+\theta_2) & -sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ sin(\theta_1+\theta_2) & cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -sin(\theta_1+\theta_2) \\ cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2-733}
$$

Thay thế lại cho thấy rằng

$$
{}^0\dot{d}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -sin\theta_1 \\ cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \begin{bmatrix} -sin(\theta_1+\theta_2) \\ cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-734}
$$

Phương trình này có thể được sắp xếp lại:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1+\theta_2) & -l_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2) & l_2 c(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&= J_D \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2-735}
$$

Tận dụng sự đơn giản về cấu trúc của cánh tay robot 2R, chúng ta có thể xác định ma trận Jacobi của nó dễ dàng hơn. Động học thuận của cánh tay robot được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
{}^0T_2 &= {}^0T_1\, {}^1T_2 \\
&= \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-736}
$$

điểm hiển thị vị điểm tác động cuối ${}_0^0\mathrm{d}_2$ của cánh tay robot ở

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \tag{2-735}$$

Đạo hàm phương trình ta có

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{2-736}$$

Có thể được sắp xếp lại dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{2-737}$$

Hoặc

$$\dot{X} = J_D \dot{\theta} \tag{2-738}$$

J_D là ma trận Jacobian của tay máy 2R.

$$\begin{aligned} J_D &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 - l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-739}$$

Sử dụng các góc nghiêng tuyệt đối của các khâu, $\theta_1, \theta_1 + \theta_2$, chúng ta cũng có thể viết phương trình vận tốc của tay máy 2R như sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 & -l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 cos\theta_1 & l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{2-740}$$

Ví dụ 2-122: Cột của ma trận Jacobian cho tay máy 2R.

Đạo hàm Jacobian của tay máy 2R phẳng có thể được xác định một cách có hệ thống bằng cách sử dụng phương pháp từng cột một. Vector vị trí toàn cục của các hệ tọa độ là:

$$\begin{aligned} {}_1^0 d_2 &= l_2\, {}^0\hat{\imath}_2 \\ {}^0 d_2 &= l_1\, {}^0\hat{\imath}_1 + l_2\, {}^0\hat{\imath}_2 \end{aligned} \tag{2-741}$$

và do đó,

$$\begin{aligned} {}^0\dot{d}_2 &= {}_0\omega_1 \times {}^0 d_2 + {}_1^0\omega_2 \times {}_1^0 d_2 \\ &= \dot{\theta}_1\, {}^0\hat{k}_0 \times (l_1\, {}^0\hat{\imath}_1 + l_2\, {}^0\hat{\imath}_2) + \dot{\theta}_2\, {}^0\hat{k}_1 \times l_2\, {}^0\hat{\imath}_2 \\ &= \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 \times (l_1\, {}^0\hat{\imath}_1 + l_2\, {}^0\hat{\imath}_2) & {}^0\hat{k}_1 \times l_2\, {}^0\hat{\imath}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-742}$$

mà có thể được thiết lập theo dạng sau:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{d}_2 \\ {}_0\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 \times {}^0d_2 & {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_2 \\ {}^0\hat{k}_0 & {}^0\hat{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J\dot{\theta} \quad (2\text{-}743)$$

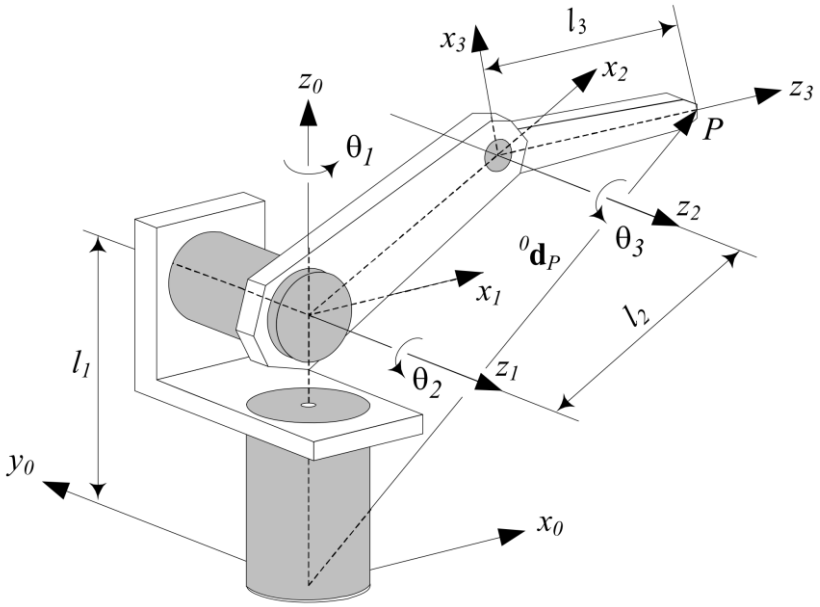
Ví dụ 2-123: Tay máy dạng khớp nối.

Hình 2-98 minh họa một tay máy dạng khớp nối. Các khớp nối của tay máy là $R \vdash R(90), R \parallel R(0), R \vdash R(90)$, và các ma trận biến đổi tương ứng giữa các hệ tọa độ là:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & -cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}744)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}745)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 & 0 \\ sin\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}746)$$



Hình 2-98 Tay máy khớp nối $R \vdash R \parallel R$.

Điểm tác động cuối của tay máy tại P. Tọa độ toàn cục của P là:

$${}^0r_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta_1\left(l_2cos\theta_2 + l_3sin(\theta_2+\theta_3)\right) \\ sin\theta_1\left(l_2cos\theta_2 + l_3sin(\theta_2+\theta_3)\right) \\ l_1 - l_3cos(\theta_2+\theta_3) + l_2sin\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}747)$$

Tọa độ của ${}^0r_P$ phải được sử dụng để xác định ma trận Jacobian của tay máy.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}748)$$

$$\frac{\partial X_P}{\partial \theta_1} = -(l_3 sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 cos\theta_2) sin\theta_1$$

$$\frac{\partial Y_P}{\partial \theta_1} = (l_3 sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 cos\theta_2) cos\theta_1 \quad (2\text{-}749)$$

$$\frac{\partial Z_P}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial X_P}{\partial \theta_2} = (l_3 cos(\theta_2 + \theta_3) - l_2 sin\,\theta_2) cos\theta_1$$

$$\frac{\partial Y_P}{\partial \theta_2} = (l_3 cos(\theta_2 + \theta_3) - l_2 sin\theta_2) sin\theta_1 \quad (2\text{-}750)$$

$$\frac{\partial Z_P}{\partial \theta_2} = l_3 sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 cos\theta_2$$

$$\frac{\partial X_P}{\partial \theta_3} = l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_1$$

$$\frac{\partial Y_P}{\partial \theta_3} = l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_1 \quad (2\text{-}751)$$

$$\frac{\partial Z_P}{\partial \theta_3} = l_3 sin(\theta_2 + \theta_3)$$

$$J = \begin{bmatrix} -(l_3 s\theta_{23} + l_2 c\theta_2) s\theta_1 & (l_3 c\theta_{23} - l_2 s\theta_2) c\theta_1 & l_3 c\theta_{23} c\theta_1 \\ (l_3 s\theta_{23} + l_2 c\theta_2) c\theta_1 & (l_3 c\theta_{23} - l_2 s\theta_2) s\theta_1 & l_3 c\theta_{23} s\theta_1 \\ 0 & l_3 s\theta_{23} + l_2 c\theta_2 & l_3 s\theta_{23} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}752)$$

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3 \quad (2\text{-}753)$$

2.7.3. Vector tạo ma trận Jacobian

Ma trận Jacobian là một phép biến đổi tuyến tính, ánh xạ tốc độ của các khớp sang tốc độ của hệ tọa độ Descartes.

$$\dot{X} = J\dot{q} \quad (2\text{-}754)$$

Và bằng với

$$J = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 \times {}^0_0 d_n & {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1 d_n & \dots & {}^0\hat{k}_{n-1} \times {}^0_{n-1} d_n \\ {}^0\hat{k}_0 & {}^0\hat{k}_1 & \dots & {}^0\hat{k}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}755)$$

J có thể được tính toán theo từng cột. Cột thứ i của J được gọi là vector sinh Jacobian và được ký hiệu bằng $c_i(q)$.

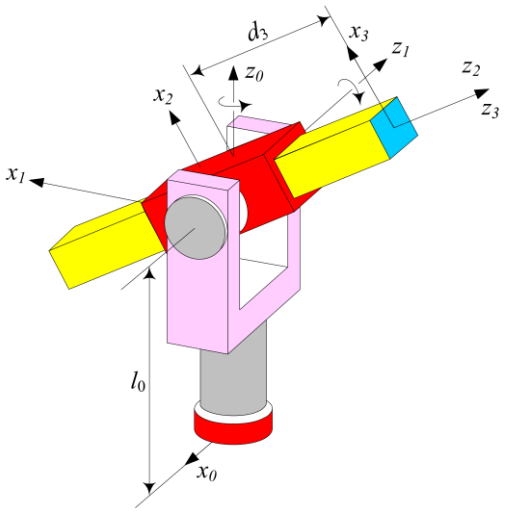
$$c_i(q) = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_{i-1} \times {}^0_{i-1}d_n \\ {}^0\hat{k}_{i-1} \end{bmatrix} \tag{2-756}$$

Để tính cột thứ i của ma trận Jacobian, chúng ta cần tìm hai vector ${}^0_{i-1}\mathrm{d}_n$ và ${}^0\hat{k}_{i-1}$. Những vector này là vị trí gốc và vector đơn vị trục khớp của khung tọa độ gắn với khâu $(i-1)$, đều được biểu diễn trong khung tọa độ cơ sở.

Tính toán J, dựa trên các vector tạo ra ma trận Jacobian, cho thấy rằng động học vận tốc thuận là kết quả của động học vị trí thuận của robot.

Ví dụ 2-124: Ma trận Jacobian cho tay máy cầu.

Hình 2-99 mô tả một tay máy cầu. Để tìm ma trận Jacobian của nó, chúng ta bắt đầu bằng việc xác định các trục ${}^0\hat{k}_{i-1}$ cho $i = 1,2,3$. Sẽ dễ dàng hơn nếu chúng ta sử dụng các định nghĩa đồng nhất,



Hình 2-99 Tay máy cầu.

$${}^0\hat{k}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-757}$$

$$\begin{aligned} {}^0\hat{k}_1 &= {}^0T_1\,{}^1\hat{k}_1 \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin\theta_1 \\ cos\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^0\hat{k}_2 &= {}^0T_2\,{}^2\hat{k}_2 \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_1c\theta_2 & -s\theta_1 & c\theta_1s\theta_2 & 0 \\ c\theta_2s\theta_1 & c\theta_1 & s\theta_1s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta_1sin\theta_2 \\ sin\theta_1sin\theta_2 \\ cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2-758}$$

Các vector được xác định:

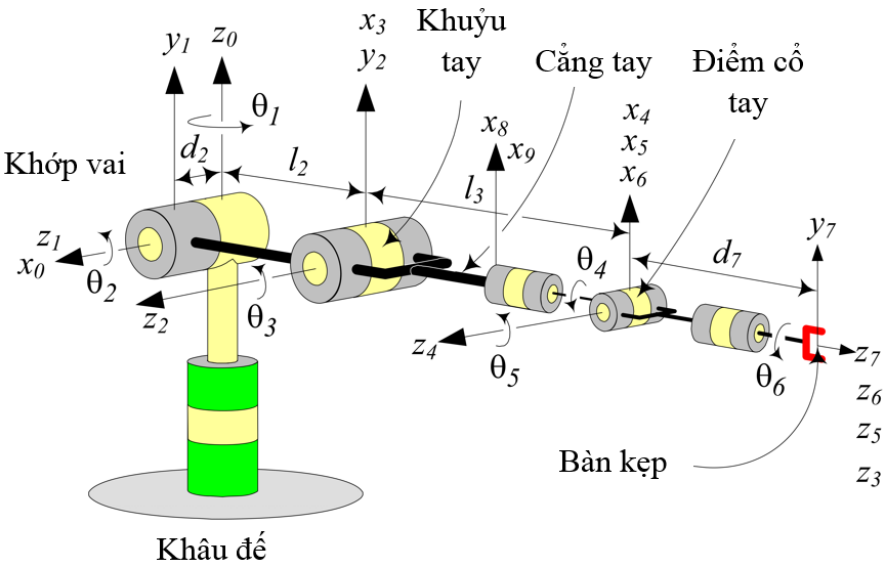
$$ {}^0_0d_3 = l_0\ {}^0\hat{k}_0 + d_3\ {}^0\hat{k}_2 = \begin{bmatrix} d_3cos\theta_1sin\theta_2 \\ d_3sin\theta_1sin\theta_2 \\ l_0 + d_3cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}759) $$

$$ {}^0_1d_3 = d_3\ {}^0\hat{k}_2 = \begin{bmatrix} d_3cos\theta_1sin\theta_2 \\ d_3sin\theta_1sin\theta_2 \\ d_3cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}760) $$

Do đó, ma trận Jacobian của cánh tay robot là

$$ \begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 \times {}^0_0d_3 & {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_3 & {}^0\hat{k}_2 \\ {}^0\hat{k}_0 & {}^0_0\hat{k}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -d_3sin\theta_1sin\theta_2 & d_3cos\theta_1cos\theta_2 & cos\theta_1sin\theta_2 \\ d_3cos\theta_1sin\theta_2 & d_3cos\theta_2sin\theta_1 & sin\theta_1sin\theta_2 \\ 0 & -d_3sin\theta_2 & cos\theta_2 \\ 0 & -sin\theta_1 & 0 \\ 0 & cos\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2\text{-}761) $$

Ví dụ 2-125: Ma trận Jacobian cho tay máy dạng khớp nối.



Hình 2-100 Tay máy dạng khớp nối 6 DOF [1].

Ma trận Jacobian của một robot có 6 bậc tự do (6 DOF) là một ma trận 6 × 6. Robot được hiển thị trong Hình 2-100 và các ma trận biến đổi của nó được tính toán trong Ví dụ 2-109. Cột thứ i của Jacobian, $c_i(q)$, là

$$ c_i(q) = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_{i-1} \times {}^0_{i-1}d_6 \\ {}^0\hat{k}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}762) $$

Để tính cột đầu tiên của ma trận Jacobian, chúng ta cần tìm ${}^0\hat{k}_0$ và ${}^0\,d_6$. Hướng của trục z_0 trong hệ tọa độ cơ sở là

$$ {}^0\hat{k}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-763} $$

Vector vị trí của khung tọa độ khâu chấp hành cuối B_6 là ${}^0\mathrm{d}_6$, có thể được xác định trực tiếp từ cột thứ tư của ma trận biến đổi ${}^0T_6$.

$$ \begin{aligned} {}^0T_6 &= {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6 \\ &= \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0d_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-764} $$

Với

$$ {}^0d_6 = \begin{bmatrix} t_{14} \\ t_{24} \\ t_{34} \end{bmatrix} \tag{2-765} $$

Trong đó,

$$ \begin{aligned} t_{14} = {} & d_6\left(s\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + c\theta_1\left(c\theta_4 s\theta_5 c(\theta_2+\theta_3) + c\theta_5 s(\theta_2+\theta_3)\right)\right) \\ & + l_3 c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) + d_2 s\theta_1 + l_2 c\theta_1 c\theta_2 \\ t_{24} = {} & d_6\left(-c\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + s\theta_1\left(c\theta_4 s\theta_5 c(\theta_2+\theta_3) + c\theta_5 s(\theta_2+\theta_3)\right)\right) \\ & + s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) l_3 - d_2 c\theta_1 + l_2 c\theta_2 s\theta_1 \\ t_{34} = {} & d_6\left(c\theta_4 s\theta_5 s(\theta_2+\theta_3) - c\theta_5 c(\theta_2+\theta_3)\right) \\ & + l_2 s\theta_2 + l_3 c(\theta_2+\theta_3). \end{aligned} \tag{2-766} $$

Do đó,

$$ {}^0\hat{k}_0 \times {}^0d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_{14} \\ t_{24} \\ t_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_{24} \\ t_{14} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-767} $$

và vector tạo ra Jacobian đầu tiên là:

$$ c_1 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 \times {}^0d_6 \\ {}^0\hat{k}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_{24} \\ t_{14} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-768} $$

Đối với cột thứ 2, chúng ta cần tìm ${}^0\hat{k}_1$ và ${}^0_1d_6$. Trục z_1 trong hệ tọa độ cơ sở có thể được xác định bằng

$$ \begin{aligned} {}^0\hat{k}_1 &= {}^0R_1\,{}^1\hat{k}_1 = {}^0R_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta_1 \\ -cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2-769} $$

Nửa đầu của c_2 là ${}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_6$. Vector ${}^0_1d_6$ là vị trí của khâu chấp hành cuối trong hệ tọa độ B_1, tuy nhiên nó phải được biểu diễn trong hệ tọa độ cơ sở để có thể thực hiện phép nhân chéo. Một cách khác là tìm ${}^1\hat{k}_1 \times {}^1d_6$ và biến đổi kết quả sang hệ tọa độ cơ sở. Vector ${}^1d_6$ là cột thứ tư của ${}^1T_6 = {}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6$, được mô tả trong Ví dụ 2-109, bằng với

$$ {}^1d_6 = \begin{bmatrix} l_2cos\theta_2 + l_3sin(\theta_2+\theta_3) \\ l_2sin\theta_2 - l_3cos(\theta_2+\theta_3) \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{2-770} $$

Vì vậy, nửa đầu của c_2 là

$$ \begin{aligned} {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_6 &= {}^0R_1\left({}^1\hat{k}_1 \times {}^1d_6\right) \\ &= {}^0R_1\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2cos\theta_2 + l_3sin(\theta_2+\theta_3) \\ l_2sin\theta_2 - l_3cos(\theta_2+\theta_3) \\ d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta_1\left(-l_2sin\theta_2 + l_3cos(\theta_2+\theta_3)\right) \\ sin\theta_1\left(-l_2sin\theta_2 + l_3cos(\theta_2+\theta_3)\right) \\ l_2cos\theta_2 + l_3sin(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-771} $$

Và c_2 là

$$ c_2 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_6 \\ {}^0\hat{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta_1\left(-l_2sin\theta_2 + l_3cos(\theta_2+\theta_3)\right) \\ sin\theta_1\left(-l_2sin\theta_2 + l_3cos(\theta_2+\theta_3)\right) \\ l_2cos\theta_2 + l_3sin(\theta_2+\theta_3) \\ sin\theta_1 \\ -cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-772} $$

Cột thứ ba được tạo ra bởi ${}^0\hat{k}_2$ và ${}^0_2d_6$. Vector ${}^0_2d_6$ là vị trí của khâu chấp hành cuối (end-effector) trong hệ tọa độ B_2 và là cột thứ tư của ${}^2T_6 = {}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6$. Trục z_2 trong khung tọa độ cơ sở có thể được xác định bằng cách

$$ {}^0\hat{k}_2 = {}^0R_2\,{}^2\hat{k}_2 = {}^0R_1\,{}^1R_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta_1 \\ -cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-773} $$

Và tích có hướng ${}^0\hat{k}_2 \times {}^0_2d_6$ có thể được xác định bằng cách biến đổi kết quả của ${}^2\hat{k}_2 \times {}^2d_6$ thành khung tọa độ cơ sở.

$$ \begin{aligned} {}^2\hat{k}_2 \times {}^2d_6 &= \begin{bmatrix} l_3cos\theta_3 \\ l_3sin\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^0\hat{k}_2 \times {}^0_2d_6 = {}^0R_2\left({}^2\hat{k}_2 \times {}^2d_6\right) &= \begin{bmatrix} l_3cos\,\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\ l_3sin\,\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\ -l_3cos(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-774} $$

Do đó, c_3 là:

$$c_3 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_2 \times {}^0_2d_6 \\ {}^0\hat{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 cos\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\ l_3 sin\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\ -l_3 cos(\theta_2+\theta_3) \\ sin\theta_1 \\ -cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}775)$$

Cột thứ 4 cần ${}^0\hat{k}_3$ và ${}^0_3d_6$. Vector ${}^0\hat{k}_3$ có thể được xác định bằng cách chuyển đổi từ ${}^3\hat{k}_3$ sang khung tọa độ cơ sở.

$${}^0\hat{k}_3 = {}^0R_1\,{}^1R_2\,{}^2R_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta_1(cos\theta_2 sin\theta_3 + cos\theta_3 sin\theta_2) \\ sin\,\theta_1(cos\theta_2 sin\theta_3 + sin\theta_2 cos\theta_3) \\ -cos(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}776)$$

Và nửa đầu của c_4 có thể được xác định bằng cách tính toán ${}^3\hat{k}_3 \times {}^3d_6$ và biến đổi kết quả sang hệ tọa độ cơ sở.

$${}^0R_3\left({}^3\hat{k}_3 \times {}^3d_6\right) = {}^0R_3\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}777)$$

Do đó, c_4 là:

$$c_4 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_3 \times {}^0_3d_6 \\ {}^0\hat{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ cos\theta_1(cos\theta_2 sin\theta_3 + cos\theta_3 sin\theta_2) \\ sin\theta_1(cos\theta_2 sin\theta_3 + sin\theta_2 cos\theta_3) \\ -cos(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}778)$$

Cột thứ 5 cần ${}^0\hat{k}_4$ và ${}^0_4d_6$. Chúng ta có thể tìm vector ${}^0\hat{k}_4$ bằng cách biến đổi ${}^4\hat{k}_4$ sang khung tọa độ cơ sở.

$${}^0\hat{k}_4 = {}^0R_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4 s\theta_1 - c\theta_1 s\theta_4 c(\theta_2+\theta_3) \\ -c\theta_1 c\theta_4 - s\theta_1 s\theta_4 c(\theta_2+\theta_3) \\ -s\theta_4 s(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}779)$$

Nửa phần đầu của c_5 là ${}^4\hat{k}_4 \times {}^4d_6$, được biểu diễn trong hệ tọa độ cơ sở.

$${}^0R_4\left({}^4\hat{k}_4 \times {}^4d_6\right) = {}^0R_4\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}780)$$

Do đó, c_5 là:

$$c_5 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_4 \times {}^0_4d_6 \\ {}^0\hat{k}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ cos\theta_4 sin\theta_1 - cos\theta_1 sin\theta_4 cos(\theta_2+\theta_3) \\ -cos\theta_1 cos\theta_4 - sin\theta_1 sin\theta_4 cos(\theta_2+\theta_3) \\ -sin\theta_4 sin(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}781)$$

Cột thứ 6 được xác định bằng cách tính toán ${}^0\hat{k}_5$ và ${}^0\hat{k}_5 \times {}^0_5d_6$. Vector ${}^0\hat{k}_5$ là

$$
\begin{aligned}
{}^0\hat{k}_5 &= {}^0R_5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -c\theta_1c\theta_4s(\theta_2+\theta_3) - s\theta_4\big(s\theta_1s\theta_4 + c\theta_1c\theta_4c(\theta_2+\theta_3)\big) \\ -s\theta_1c\theta_4s(\theta_2+\theta_3) - s\theta_4\big(-c\theta_1s\theta_4 + s\theta_1c\theta_4c(\theta_2+\theta_3)\big) \\ c\theta_4c(\theta_2+\theta_3) - \frac{1}{2}s(\theta_2+\theta_3)s2\theta_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-782}
$$

Và phần nửa đầu của c_6 là ${}^5\hat{k}_5 \times {}^5d_6$, được biểu diễn trong hệ tọa độ cơ sở là:

$${}^0R_5\big({}^5\hat{k}_5 \times {}^5d_6\big) = {}^0R_5\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{2-783}$$

Do đó, c_6 là:

$$
\begin{aligned}
c_6 &= \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_5 \times {}^0_5d_6 \\ {}^0\hat{k}_5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c\theta_1c\theta_4s(\theta_2+\theta_3) - s\theta_4\big(s\theta_1s\theta_4 + c\theta_1c\theta_4c(\theta_2+\theta_3)\big) \\ -s\theta_1c\theta_4s(\theta_2+\theta_3) - s\theta_4\big(-c\theta_1s\theta_4 + s\theta_1c\theta_4c(\theta_2+\theta_3)\big) \\ c\theta_4c(\theta_2+\theta_3) - \frac{1}{2}s(\theta_2+\theta_3)s2\theta_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-784}
$$

Và ma trận Jacobian cho robot khớp nối được tính toán.

$$J = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6] \tag{2-785}$$

Ví dụ 2-126: Ma trận Jacobian cho một tay máy dạng khớp nối bằng phương pháp vi phân trực tiếp.

Hình 2-100 minh họa một robot có dạng khớp nối với ma trận biến đổi được cung cấp trong Ví dụ 2-109. Sử dụng kết quả của động học thuận.

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0d_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-786}$$

Vị trí của khâu chấp hành cuối đang ở

$${}^0d_6 = \begin{bmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{14} \\ t_{24} \\ t_{34} \end{bmatrix} \tag{2-787}$$

Trong đó,

$$\begin{aligned}
t_{14} = \; & d_6\left(s\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + c\theta_1\left(c\theta_4 s\theta_5 c(\theta_2+\theta_3) + c\theta_5 s(\theta_2+\theta_3)\right)\right) \\
& + l_3 c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) + d_2 s\theta_1 + l_2 c\theta_1 c\theta_2 \\
t_{24} = \; & d_6\left(-c\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + s\theta_1\left(c\theta_4 s\theta_5 c(\theta_2+\theta_3) + c\theta_5 s(\theta_2+\theta_3)\right)\right) \\
& + s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) l_3 - d_2 c\theta_1 + l_2 c\theta_2 s\theta_1 \\
t_{34} = \; & d_6\left(c\theta_4 s\theta_5 s(\theta_2+\theta_3) - c\theta_5 c(\theta_2+\theta_3)\right) \\
& + l_2 s\theta_2 + l_3 c(\theta_2+\theta_3).
\end{aligned} \tag{2-788}$$

Lấy đạo hàm X_6 được:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_6 = \; & \frac{\partial X_6}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial X_6}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2 + \cdots + \frac{\partial X_6}{\partial \theta_6}\dot{\theta}_6 \\
= \; & J_{11}\dot{\theta}_1 + J_{12}\dot{\theta}_2 + \cdots + J_{16}\dot{\theta}_6 \\
= \; & -t_{24}\dot{\theta}_1 + cos\theta_1\left(-l_2 sin\theta_2 + l_3 cos(\theta_2+\theta_3)\right)\dot{\theta}_2 \\
& + l_3 cos\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3)\dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{2-789}$$

Thấy rằng

$$\begin{aligned}
J_{11} &= -t_{24} \\
J_{12} &= cos\theta_1\left(-l_2 sin\theta_2 + l_3 cos(\theta_2+\theta_3)\right) \\
J_{13} &= l_3 cos\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\
J_{14} &= 0 \\
J_{15} &= 0 \\
J_{16} &= 0.
\end{aligned} \tag{2-790}$$

Tương tự, đạo hàm Y_6 và Z_6

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_6 = \; & \frac{\partial Y_6}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial Y_6}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2 + \cdots + \frac{\partial Y_6}{\partial \theta_6}\dot{\theta}_6 \\
= \; & J_{21}\dot{\theta}_1 + J_{22}\dot{\theta}_2 + \cdots + J_{26}\dot{\theta}_6 \\
= \; & t_{14}\dot{\theta}_1 + sin\theta_1\left(-l_2 sin\theta_2 + l_3 cos(\theta_2+\theta_3)\right)\dot{\theta}_2 \\
& + l_3 sin\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3)\dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{2-791}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_6 = \; & \frac{\partial Z_6}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial Z_6}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2 + \cdots + \frac{\partial Z_6}{\partial \theta_6}\dot{\theta}_6 \\
= \; & J_{31}\dot{\theta}_1 + J_{32}\dot{\theta}_2 + \cdots + J_{36}\dot{\theta}_6 \\
= \; & \left(l_2 cos\theta_2 + l_3 sin(\theta_2+\theta_3)\right)\dot{\theta}_2 - l_3 cos(\theta_2+\theta_3)\dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{2-792}$$

Thấy rằng

$$\begin{aligned}
J_{21} &= t_{14} \\
J_{22} &= sin\theta_1\left(-l_2 sin\theta_2 + l_3 cos(\theta_2+\theta_3)\right) \\
J_{23} &= l_3 sin\theta_1 sin(\theta_2+\theta_3) \\
J_{24} &= 0 \\
J_{25} &= 0 \\
J_{26} &= 0
\end{aligned} \tag{2-793}$$

$$
\begin{aligned}
J_{31} &= 0 \\
J_{32} &= l_2 cos\theta_2 + l_3 sin(\theta_2 + \theta_3) \\
J_{33} &= -l_3 cos(\theta_2 + \theta_3) \\
J_{34} &= 0 \\
J_{35} &= 0 \\
J_{36} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2-794}
$$

Không có phương trình rõ ràng để mô tả các chuyển động quay của khung tọa độ khâu chấp hành cuối xoay quanh các trục. Vì vậy, không có phương trình để tìm đạo hàm xung quanh ba trục bằng vi phân. Điều này là một lý do để tìm kiếm các phương pháp gián tiếp hoặc có hệ thống hơn để đánh giá ma trận Jacobian. Tuy nhiên, ba hàng tiếp theo của ma trận Jacobian có thể được tìm bằng cách tính toán vector vận tốc góc dựa trên ma trận vận tốc góc.

$$
\begin{aligned}
{}_0\tilde{\omega}_6 = {}^0\dot{R}_6\,{}^0R_6^T &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix} \\
{}_0\omega_6 &= \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-795}
$$

và sau đó sắp xếp lại các thành phần để hiển thị các phần tử Jacobian.

$$
\begin{aligned}
\omega_X &= \frac{\partial \omega_X}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial \omega_X}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2 + \cdots + \frac{\partial \omega_X}{\partial \theta_6}\dot{\theta}_6 \\
\omega_Y &= \frac{\partial \omega_Y}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial \omega_Y}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2 + \cdots + \frac{\partial \omega_Y}{\partial \theta_6}\dot{\theta}_6 \\
\omega_Z &= \frac{\partial \omega_Z}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial \omega_Z}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2 + \cdots + \frac{\partial \omega_Z}{\partial \theta_6}\dot{\theta}_6
\end{aligned}
\tag{2-796}
$$

Phân tích (2-795) cho cánh tay robot dạng khớp nối cho thấy rằng vector vận tốc góc của khung tọa độ khâu chấp hành cuối là:

$$
\begin{aligned}
\omega_X = \;& sin\theta_1\dot{\theta}_2 + sin\theta_1\dot{\theta}_3 + cos\theta_1 sin\theta_{23}\dot{\theta}_4 \\
& +(cos\theta_4 sin\theta_1 - cos\theta_1 sin\theta_4 cos\theta_{23})\dot{\theta}_5 \\
& -\big(c\theta_1 c\theta_4 s\theta_{23} + s\theta_4(s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4 c\theta_{23})\big)\dot{\theta}_6 \\
\omega_Y = -\;& cos\theta_1\dot{\theta}_2 - cos\theta_1\dot{\theta}_3 + sin\theta_1 sin\theta_{23}\dot{\theta}_4 \\
& +(-cos\theta_1 cos\theta_4 - sin\theta_1 sin\theta_4 cos\theta_{23})\dot{\theta}_5 \\
+\;& \big(-s\theta_1 c\theta_4 s\theta_{23} - s\theta_4(-c\theta_1 s\theta_4 + s\theta_1 c\theta_4 c\theta_{23})\big)\dot{\theta}_6 \\
\omega_Z = \;& \dot{\theta}_1 - cos(\theta_2 + \theta_3)\dot{\theta}_4 - sin\theta_4 sin(\theta_2 + \theta_3)\dot{\theta}_5 \\
& +\left(cos\theta_4 cos\theta_{23} - \frac{1}{2}sin\theta_{23} sin2\theta_4\right)\dot{\theta}_6
\end{aligned}
\tag{2-797}
$$

Và do đó,

$$
\begin{aligned}
J_{41} &= 0 \\
J_{42} &= sin\theta_1 \\
J_{43} &= sin\theta_1 \\
J_{44} &= cos\theta_1(cos\theta_2 sin\theta_3 + cos\theta_3 sin\theta_2) \\
J_{45} &= cos\theta_4 sin\theta_1 - cos\theta_1 sin\theta_4 cos(\theta_2 + \theta_3) \\
J_{46} &= -c\theta_1 c\theta_4 s(\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad -s\theta_4\left(s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4 c(\theta_2 + \theta_3)\right)
\end{aligned}
\tag{2-798}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{51} &= 0 \\
J_{52} &= -cos\theta_1 \\
J_{53} &= -cos\theta_1 \\
J_{54} &= sin\theta_1(cos\theta_2 sin\theta_3 + sin\theta_2 cos\theta_3) \\
J_{55} &= -cos\theta_1 cos\theta_4 - sin\theta_1 sin\theta_4 cos(\theta_2 + \theta_3) \\
J_{56} &= -s\theta_1 c\theta_4 s(\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad -s\theta_4\left(-c\theta_1 s\theta_4 + s\theta_1 c\theta_4 c(\theta_2 + \theta_3)\right) \\
J_{61} &= 1 \\
J_{62} &= 0 \\
J_{63} &= 0 \\
J_{64} &= -cos(\theta_2 + \theta_3) \\
J_{65} &= -sin\theta_4 sin(\theta_2 + \theta_3) \\
J_{66} &= cos\theta_4 cos(\theta_2 + \theta_3) - \frac{1}{2} sin(\theta_2 + \theta_3) sin2\theta_4.
\end{aligned}
\tag{2-799}
$$

2.7.4. Động học vận tốc ngược

Vấn đề động học vận tốc ngược, còn được biết đến là vấn đề giải quyết tốc độ, là việc tìm vector tốc độ các khớp $\dot{q}$ tương ứng với vector tốc độ của khâu chấp hành cuối $\dot{X}$. Sáu bậc tự do được yêu cầu để có thể di chuyển khâu chấp hành cuối theo một hướng tùy ý với một vận tốc góc tùy ý. Vector tốc độ của khâu chấp hành cuối $\dot{X}$ liên quan đến vector tốc độ các khớp $\dot{q}$ bằng ma trận Jacobian J.

$$
\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0v_n \\ {}^0\omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_D \\ J_R \end{bmatrix} \dot{q} = J\dot{q} \tag{2-800}
$$

Do đó, đối với động học vận tốc ngược, chúng ta cần sự thay đổi vi phân trong các tọa độ chuyển động của các khớp được biểu diễn dưới dạng các vận tốc dịch chuyển thẳng và vận tốc góc của khâu chấp hành cuối. Nếu ma trận Jacobian không kỳ dị trong thời điểm tính toán, ma trận nghịch đảo của Jacobian J^{-1} tồn tại và chúng ta có thể tìm được vector vận tốc của các khớp cần thiết như sau:

$$
\dot{q} = J^{-1}\dot{X} \tag{2-801}
$$

Cấu hình kỳ dị là khi định thức của ma trận Jacobian bằng không và do đó, J^{-1} không xác định được. Phương trình (2-800) xác định các tốc độ cần thiết tại các khớp riêng lẻ để tạo ra các tốc độ khâu chấp hành cuối mong muốn $\dot{X}$.

Vì động học vận tốc nghịch là kết quả của động học vận tốc thuận và cần phải thực hiện phép nghịch đảo ma trận, vấn đề tương đương với việc giải một tập hợp các phương trình đại số tuyến tính. Để tìm J^{-1}, mọi phương pháp nghịch đảo ma trận có thể được áp dụng.

Ví dụ 2-127: Vận tốc nghịch của tay máy phẳng.

Hình 2-96 minh họa một tay máy phẳng với phương trình vận tốc thuận như sau.

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} \tag{2-802}$$

Để xác định vận tốc nghịch, chúng ta cần xác định nghịch đảo của ma trận Jacobian J.

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix}\frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta}\\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{bmatrix}\\ J^{-1} &= \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial Y}{\partial \theta} - \frac{\partial X}{\partial \theta}\frac{\partial Y}{\partial r}}\begin{bmatrix}\frac{\partial Y}{\partial \theta} & -\frac{\partial X}{\partial \theta}\\ -\frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial r}\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{r}\begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\ -sin\theta & cos\theta\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-803}$$

Do đó,

$$\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\ -sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} \tag{2-804}$$

Ví dụ 2-128: Vận tốc nghịch của tay máy phẳng 2R.

Trong Ví dụ 2-75 và Ví dụ 2-107, đã phân tích về động học thuận và ngược của một robot phẳng 2R. Jacobian và động học vận tốc thuận của nó cũng đã được xác định trong Ví dụ 2-121 như sau:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= J\dot{q}\\ \begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-l_1s\theta_1 - l_2s(\theta_1+\theta_2) & -l_2s(\theta_1+\theta_2)\\ l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) & l_2c(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-805}$$

Trong đó,

$$\begin{aligned} \dot{q} &= J^{-1}\dot{X}\\ \begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-l_1s\theta_1 - l_2s(\theta_1+\theta_2) & -l_2s(\theta_1+\theta_2)\\ l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) & l_2c(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-806}$$

Và do đó,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\dot{X}c(\theta_1+\theta_2) + \dot{Y}s(\theta_1+\theta_2)}{l_1s\theta_2}\\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\dot{X}\left(l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2)\right) + \dot{Y}\left(l_1s\theta_1 + l_2s(\theta_1+\theta_2)\right)}{-l_1l_2s\theta_2}. \end{aligned} \tag{2-807}$$

Ví dụ 2-129: Cấu hình kỳ dị của của tay máy phẳng 2R.

Cấu hình kỳ dị của một tay máy 2R xảy ra khi định thức của ma trận Jacobian (2-805) bằng không. Từ ví dụ Ví dụ 2-129, chúng ta có:

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}808)$$

Định thức của ma trận J là:

$$|J| = l_1 l_2 sin\theta_2 \quad (2\text{-}809)$$

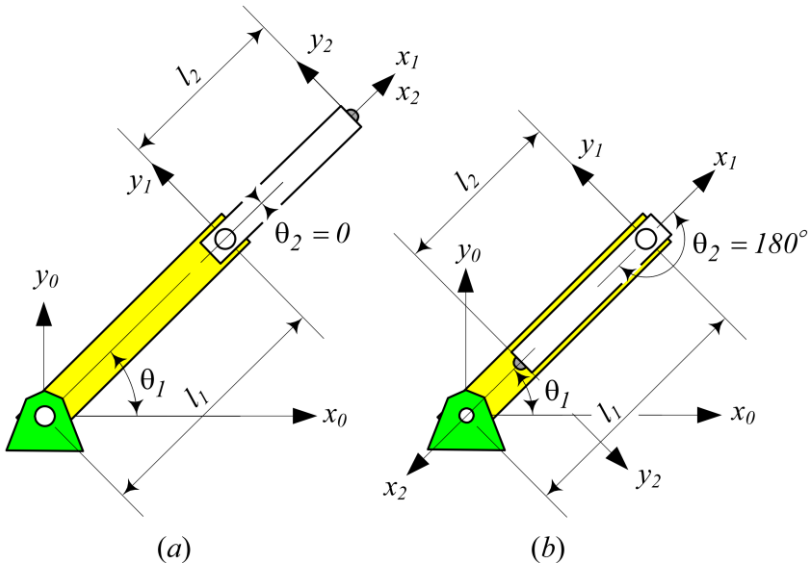
Vì vậy, các cấu hình kỳ dị của tay máy là

$$\theta_2 = 0 \qquad \theta_2 = 180 \text{ độ} \quad (2\text{-}810)$$

Tương ứng với các cấu hình được kéo dài hoàn toàn hoặc co lại hoàn toàn, như được hiển thị trong Hình 2-101(a) và (b) tương ứng. Tại các cấu hình kỳ dị, giá trị của θ_1 không xác định và có thể có bất kỳ giá trị thực nào. Hai cột của ma trận Jacobian trở nên song song vì Phương trình (2-805) trở thành.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} &= 2l_1 \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + l_2 \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ &= \left(2l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right) \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2\text{-}811)$$

Trong tình huống này, điểm tác động cuối chỉ có thể di chuyển theo hướng vuông góc so với các khâu cánh tay.



Hình 2-101 Cấu hình kỳ dị của tay máy phẳng 2R.

Ví dụ 2-130: Phương pháp phân tích cho động học vận tốc nghịch.

Theo lý thuyết, chúng ta phải có thể tính toán tốc độ chung của các khớp từ các phương trình mô tả vận tốc thuận, tuy nhiên, một phép tính như vậy không dễ dàng trong trường hợp tổng quát.

Ví dụ, xem xét một tay máy 2R phẳng như được thể hiện trong Hình 2-97. Vận tốc điểm cuối của tay máy 2R được biểu diễn trong Phương trình (2-742) như sau:

$$ {}^0\dot{d}_2 = \dot{\theta}_1\, {}^0\hat{k}_0 \times (l_1\, {}^0\hat{\imath}_1 + l_2\, {}^0\hat{\imath}_2) + \dot{\theta}_2\, {}^0\hat{k}_1 \times l_2\, {}^0\hat{\imath}_2 \qquad (2\text{-}812) $$

Dùng tích vô hướng của phương trình này với ${}^0\hat{\imath}_2$, ta được

$$ \begin{aligned} {}^0\dot{d}_2 \cdot {}^0\hat{\imath}_2 &= \dot{\theta}_1\left({}^0\hat{k}_0 \times l_1\, {}^0\hat{\imath}_1\right) \cdot {}^0\hat{\imath}_2 \\ &= l_1\dot{\theta}_1\, {}^0\hat{k}_0 \cdot ({}^0\hat{\imath}_1 \times {}^0\hat{\imath}_2) = l_1\dot{\theta}_1\, {}^0\hat{k}_0 \cdot {}^0\hat{\imath}_2 sin\theta_2 \\ &= l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_2 \end{aligned} \qquad (2\text{-}813) $$

Và do đó,

$$ \dot{\theta}_1 = \frac{{}^0\dot{d}_2 \cdot {}^0\hat{\imath}_2}{l_1 sin\theta_2}. \qquad (2\text{-}814) $$

Công thức tích vô hướng của (2-812) với ${}^0\hat{\imath}_1$ giảm xuống thành

$$ \begin{aligned} {}^0\dot{d}_2 \cdot {}^0\hat{\imath}_1 &= \dot{\theta}_1\left({}^0\hat{k}_0 \times l_2\, {}^0\hat{\imath}_2\right) \cdot {}^0\hat{\imath}_1 + \dot{\theta}_2\left({}^0\hat{k}_1 \times l_2\, {}^0\hat{\imath}_2\right) \cdot {}^0\hat{\imath}_1 \\ &= l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) {}^0\hat{k}_0 \cdot ({}^0\hat{\imath}_2 \times {}^0\hat{\imath}_1) \\ &= -l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) sin\theta_2 \end{aligned} \qquad (2\text{-}815) $$

Và do đó,

$$ \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1 - \frac{{}^0\dot{d}_2,\, {}^0\hat{\hat{\imath}}_1}{l_2 sin\theta_2}. \qquad (2\text{-}816) $$

Vì vậy, chúng ta có thể xác định tốc độ các khớp $\dot{\theta}_1$ và $\dot{\theta}_2$ khi tốc độ của điểm cuối ${}^0\dot{d}_2 = [\dot{X} \quad \dot{Y}]$ được cung cấp.

Ví dụ 2-131: Ma trận Jacobian cho robot với cổ tay cầu.

Ma trận Jacobian cho một robot dạng khớp nối với cổ tay cầu được tính toán trong Ví dụ 2-125.

$$ J = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 \times {}^0_0d_6 & {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_6 & {}^0\hat{k}_2 \times {}^0_2d_6 & 0 & 0 & 0 \\ {}^0\hat{k}_0 & {}^0\hat{k}_1 & {}^0\hat{k}_2 & {}^0\hat{k}_3 & {}^0\hat{k}_4 & {}^0\hat{k}_5 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}817) $$

Ma trận con 3×3 góc trên bên phải của J là không. Điều này là do cấu trúc cổ tay cầu và có ba vector vị trí cuối là không.

Chia ma trận Jacobian thành bốn ma trận con 3×3 và viết nó như sau:

$$ J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}818) $$

Trong đó

$$ \begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 \times {}^0_0d_6 & {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_6 & {}^0\hat{k}_2 \times {}^0_2d_6 \end{bmatrix} \\ [C] &= \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_0 & {}^0\hat{k}_1 & {}^0\hat{k}_2 \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_3 & {}^0\hat{k}_4 & {}^0\hat{k}_5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (2\text{-}819) $$

Nghịch đảo của ma trận Jacobian trở nên đơn giản hơn nếu chúng ta tận dụng $B = 0$. Động học vận tốc thuận của robot có thể được viết dưới dạng:

$$\dot{X} = J\dot{q}$$

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{d}_2 \\ {}_0\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \tag{2-820}$$

Phần trên của phương trình là:

$${}^0\dot{d}_2 = [A] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{2-821}$$

có thể được đảo ngược thành:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\, {}^0\dot{d}_2 \tag{2-822}$$

Phần dưới của phương trình là:

$${}_0\omega_2 = [C \quad D] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \tag{2-823}$$

Và do đó,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} &= D^{-1} \left({}_0\omega_2 - [C] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= D^{-1} \left({}_0\omega_2 - [C] A^{-1}\, {}^0\dot{d}_2 \right). \end{aligned} \tag{2-824}$$

Ví dụ 2-132: Vận tốc nghịch của tay máy dạng khớp nối.

Điểm cuối của tay máy dạng khớp nối như trên Hình 2-98 là tại:

$${}^0r_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 \left(l_2 cos\theta_2 + l_3 sin(\theta_2 + \theta_3) \right) \\ sin\theta_1 \left(l_2 cos\theta_2 + l_3 sin(\theta_2 + \theta_3) \right) \\ l_1 - l_3 cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 sin\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-825}$$

Sử dụng các thành phần của ${}^0\mathrm{r}_P$, chúng ta tính toán ma trận Jacobian của tay máy.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}826)$$

để giải bài toán động học thuận của tay máy.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_P \\ \dot{Y}_P \\ \dot{Z}_P \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}827)$$

Để giải quyết vấn đề động học vận tốc ngược của tay máy, chúng ta cần tính toán J^{-1}.

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z_P}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}828)$$

$$a_{11} = -\frac{sin\theta_1}{l_3 sin(\theta_2+\theta_3) + l_2 cos\theta_2}$$

$$a_{21} = -\frac{1}{l_2}\left(sin(\theta_2+\theta_3)\right)\frac{cos\theta_1}{cos\theta_3} \quad (2\text{-}829)$$

$$a_{31} = \frac{1}{l_2 l_3}\frac{cos\theta_1}{cos\theta_3}(l_3 sin(\theta_2+\theta_3) + l_2 cos\theta_2)$$

$$a_{12} = \frac{\cos\theta_1}{l_3 \sin(\theta_2+\theta_3) + l_2 \cos\theta_2}$$

$$a_{22} = -\frac{1}{l_2}\frac{\sin(\theta_2+\theta_3)}{\cos\theta_3}\sin\theta_1 \quad (2\text{-}830)$$

$$a_{32} = \frac{sin\theta_1}{l_2 l_3 cos\theta_3}(l_3 sin(\theta_2+\theta_3) + l_2 cos\theta_2)$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{23} = \frac{1}{l_2}\frac{\cos(\theta_2+\theta_3)}{\cos\theta_3} \quad (2\text{-}831)$$

$$a_{33} = -\frac{1}{l_2 l_3 cos\theta_3}(l_3 cos(\theta_2+\theta_3) - l_2 sin\theta_2)$$

Vì vậy, tốc độ các khớp của tay máy $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ là:

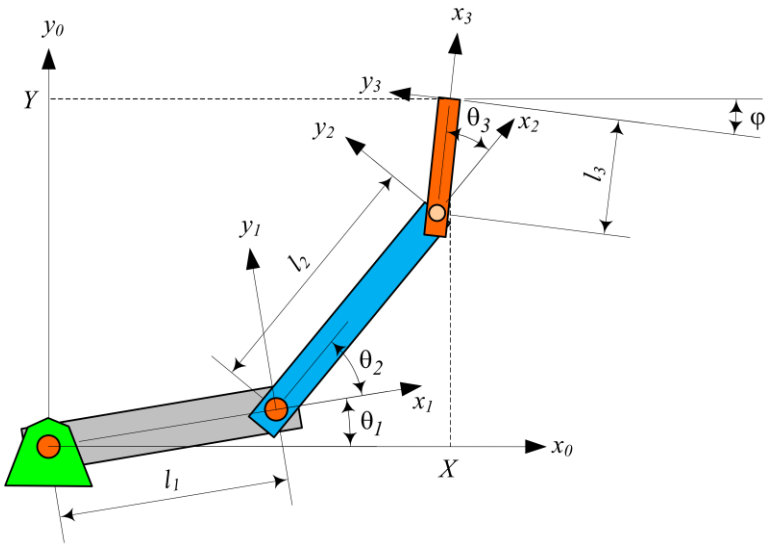
$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{X}_P \\ \dot{Y}_P \\ \dot{Z}_P \end{bmatrix} \quad (2\text{-}832)$$

2.7.5. Bài tập

1. Hình 2-102 dưới đây mô tả một tay máy phẳng $R \parallel R \parallel R$. Động học thuận của tay máy cung cấp các ma trận biến đổi sau:

$$ {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



Hình 2-102 Tay máy phẳng $R \parallel R \parallel R$.

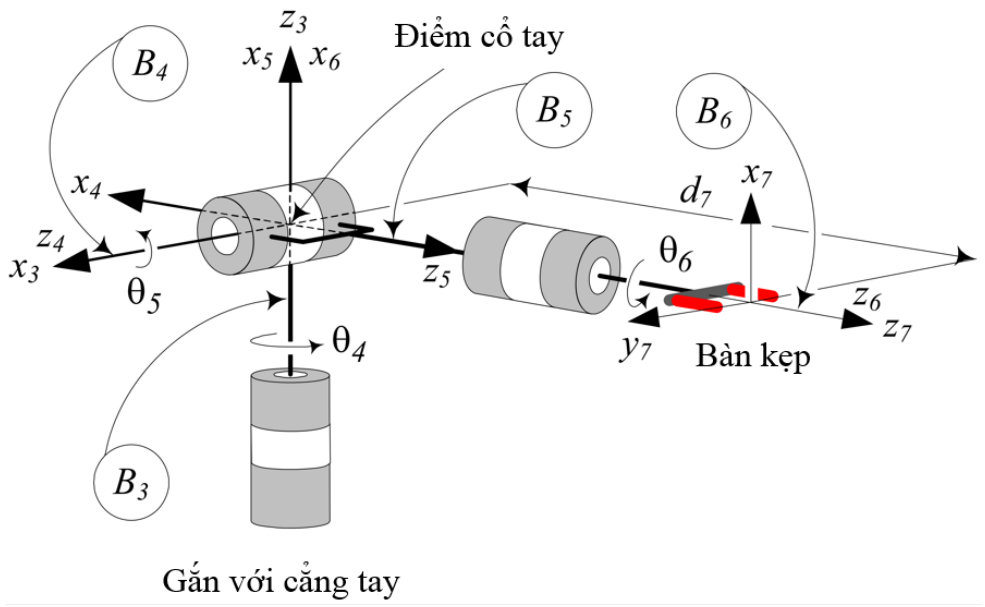
Tính ma trận Jacobian, J bằng cách sử dụng phương pháp vi phân trực tiếp, và tìm vector vận tốc Descartes của điểm cuối cho các giá trị số.

$$ \theta_1 = 56 \text{ độ} \quad \theta_2 = -28 \text{ độ} \quad \theta_3 = -10 \text{ độ} $$
$$ l_1 = 100 \text{ cm} \quad l_2 = 55 \text{ cm} \quad l_3 = 30 \text{ cm} $$
$$ \dot{\theta}_1 = 30 \frac{\text{độ}}{\text{giây}} \quad \dot{\theta}_2 = 10 \frac{\text{độ}}{\text{giây}} \quad \dot{\theta}_3 = -10 \frac{\text{độ}}{\text{giây}} $$

2. Hình 2-103 minh họa một sơ đồ của một cổ tay cầu. Các ma trận biến đổi tương ứng được cung cấp dưới đây. Giả sử rằng khung B_3 là khung tọa độ cơ sở. Tìm vector vận tốc góc của khung tọa độ B_6.

$$ {}^{3}T_{4} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{4}T_{5} = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{5}T_{6} = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



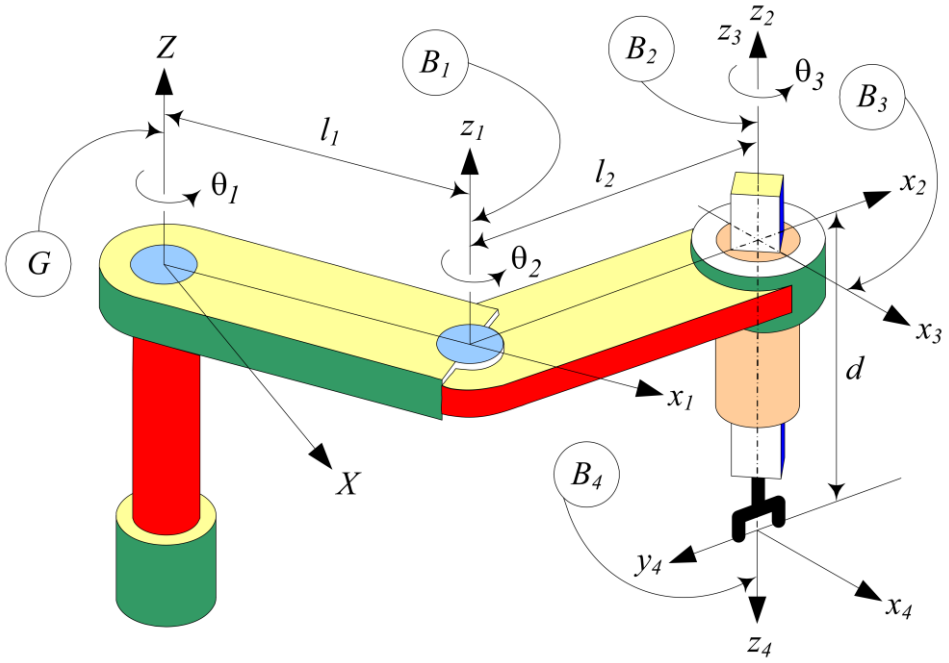
Hình 2-103 Động học cổ tay cầu [1].

3. Giả sử chúng ta gắn một khung tọa độ của công cụ, với ma trận biến đổi sau đây, vào khung tọa độ cuối B_6 của cổ tay cầu.

$$ {}^{6}T_{7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ma trận biến đổi của cổ tay được đưa ra trong Bài tập 2. Giả sử rằng khung B_3 là khung tọa độ cơ sở và tìm vận tốc dịch chuyển thẳng và vận tốc góc của khung tọa độ công cụ B_7.

4. Một tay máy SCARA $R \parallel R \parallel R \parallel P$ được hiển thị trong Hình 2-104 với các ma trận biến đổi sau. Tính ma trận Jacobian bằng cách sử dụng kỹ thuật vector tạo ra ma trận Jacobian.



Hình 2-104 Tay máy SCARA $R \parallel R \parallel R \parallel P$.

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

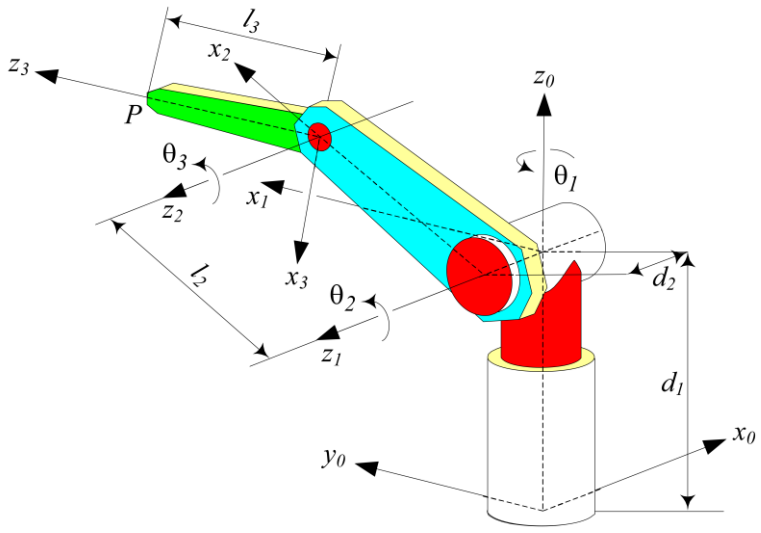
$$^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Hình 2-105 minh họa một tay máy 3 bậc tự do $R \vdash R \parallel R$ với các ma trận biến đổi sau.

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^0\mathbf{r}_P = {}^0T_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận Jacobian bằng cách sử dụng phương pháp vi phân trực tiếp và phương pháp tạo vector Jacobian.



Hình 2-105 Tay máy 3 bậc tự do $R \vdash R \parallel R$.

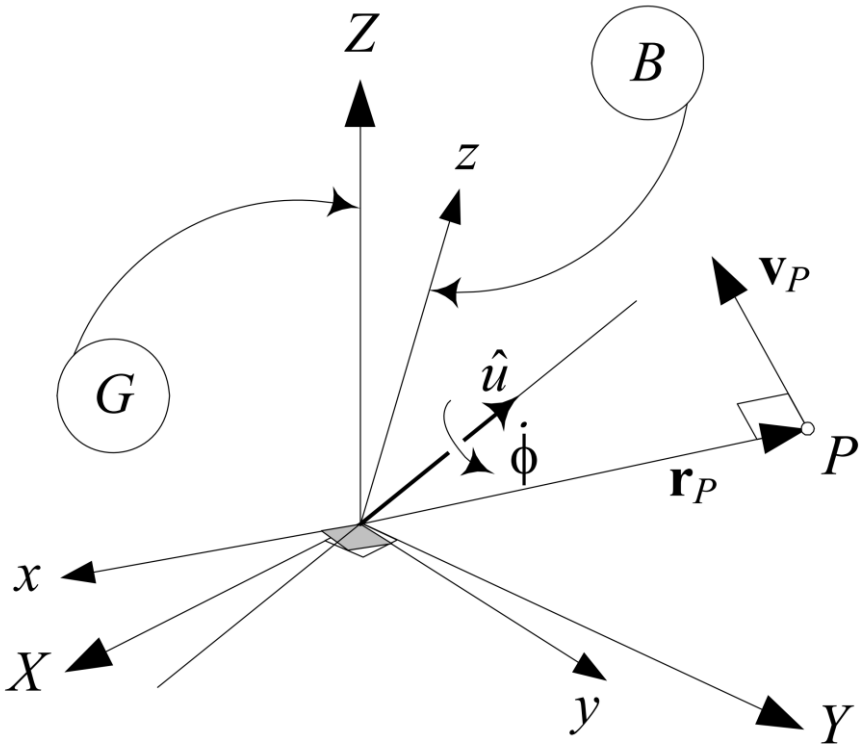
2.8. Động học gia tốc

Gia tốc góc của một vật thể rắn so với một hệ toạ độ toàn cục là đạo hàm theo thời gian của vận tốc góc tức thời của vật thể. Nó thường là một đại lượng vector có hướng khác với vận tốc góc. Chúng ta sẽ xem xét và phát triển động học gia tốc của các robot.

2.8.1. Vector và ma trận vận tốc góc

Xem xét một vật thể rắn quay $B(Oxyz)$ với một điểm cố định O trong một hệ tham chiếu $G(OXYZ)$ như được hiển thị trong Hình 2-106. Chuyển động của vật thể có thể được biểu diễn bằng một ma trận biến đổi quay theo thời gian giữa các khung tọa độ toàn cục và vật thể. Ma trận biến đổi ánh xạ các tọa độ tức thời của bất kỳ điểm cố định nào trong khung tọa độ vật thể B sang tọa độ của chúng trong khung tọa độ toàn cục G.

$$^{G}r(t) = {}^{G}R_{B}(t)\,{}^{B}r \tag{2-833}$$



Hình 2-106 Một vật thể rắn quay $B(Oxyz)$ với một điểm cố định O trong một hệ thống toàn cục $G(OXYZ)$.

Vận tốc của một điểm trên vật thể trong hệ tọa độ toàn cục là

$$^{G}v(t) = {}^{G}\dot{r}(t) = {}^{G}\dot{R}_{B}(t)\,{}^{B}r = {}_{G}\tilde{\omega}_{B}\,{}^{G}r(t) = {}_{G}\omega_{B} \times {}^{G}r(t) \tag{2-834}$$

Trong đó, ${}_{G}\omega_{B}$ là vector vận tốc góc của B so với G. Nó bằng với một phép quay với vận tốc góc $\dot{\phi}$ quanh một trục quay tại điểm tức thì $\hat{u}$.

$$\omega = \begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix} = \dot{\phi}\hat{u} \tag{2-835}$$

Vector vận tốc góc được liên kết với ma trận chéo đối xứng ${}_{G}\tilde{\omega}_{B}$ được gọi là ma trận vận tốc góc

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} \tag{2-836}$$

trong đó

$$ {}_{G}\tilde{\omega}_{B} = {}^{G}\dot{R}_{B}\,{}^{G}R_{B}^{T} = \dot{\phi}\tilde{u}. \tag{2-837}$$

Ví dụ 2-133: Xoay một điểm trên vật thể xung quanh một trục toàn cục.

Khối đá được hiển thị trong Hình 2-2 đang quay quanh trục Z với $\dot{\alpha} = 10$ độ/giây. Vận tốc toàn cục của điểm góc $P(5, 30, 10)$, khi khối đá ở $\alpha = 30$ độ, là:

$$
\begin{aligned}
{}^{G}v_P &= {}^{G}\dot{R}_B(t)\,{}^{B}r_P \\
&= \frac{{}^{G}d}{dt}\left(\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} \\
&= \dot{\alpha}\begin{bmatrix} -sin\alpha & -cos\alpha & 0 \\ cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} \\
&= \frac{10\pi}{180}\begin{bmatrix} -sin\frac{\pi}{6} & -cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ cos\frac{\pi}{6} & -sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.97 \\ -1.86 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-838}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\boldsymbol{r}_P &= {}^{G}R_B\,{}^{B}\boldsymbol{r}_P \\
&= \begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{6} & -sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ sin\frac{\pi}{6} & cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.67 \\ 28.48 \\ 10 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-839}
$$

Ví dụ 2-134: Xoay một điểm toàn cục quanh một trục toàn cục.

Góc P của khối đá trong Hình 2-2 ở ${}^{B}r_P = [5 \quad 30 \quad 10]^T$. Khi nó được quay $\alpha = 30$ độ quanh trục Z, vị trí toàn cục của P là:

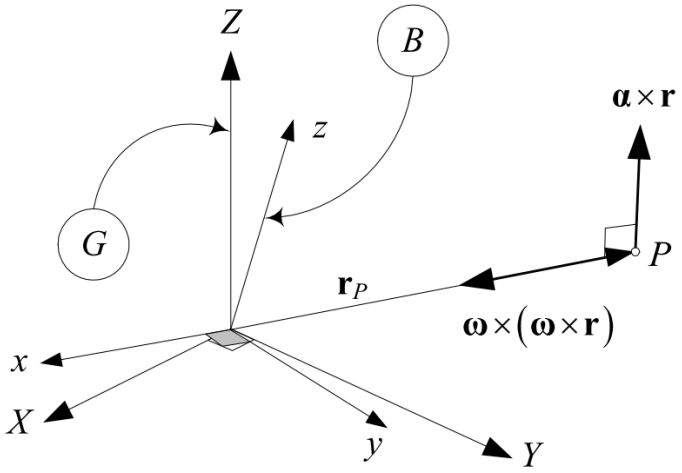
$$
\begin{aligned}
{}^{G}r_P &= {}^{G}R_B\,{}^{B}r_P \\
&= \begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{6} & -sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ sin\frac{\pi}{6} & cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.67 \\ 28.48 \\ 10 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-840}
$$

Nếu khối đá đang quay với $\dot{\alpha} = 10$ độ/giây, vận tốc toàn cục của điểm P sẽ là

$$
\begin{aligned}
{}^{G}v_P &= {}^{G}\dot{R}_B\,{}^{G}R_B^T\,{}^{G}r_P \\
&= \frac{10\pi}{180}\begin{bmatrix} -s\frac{\pi}{6} & -c\frac{\pi}{6} & 0 \\ c\frac{\pi}{6} & -s\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\frac{\pi}{6} & -s\frac{\pi}{6} & 0 \\ s\frac{\pi}{6} & c\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} -10.67 \\ 28.48 \\ 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4.97 \\ -1.86 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2-841}
$$

2.8.2. Vector và ma trận gia tốc góc

Xem xét một vật thể rắn quay $B(Oxyz)$ có một điểm cố định O trong một khung tọa độ tham chiếu $G(OXYZ)$ như được hiển thị trong Hình 2-107.



Hình 2-107 Một vật thể rắn quay $B(Oxyz)$ với một điểm cố định O trong hệ tọa độ $G(OXYZ)$.

Phương trình (2-834), cho vector vận tốc của một điểm trong một khung cố định gốc của cơ thể.

$$ {}^{G}\dot{r}(t) = {}^{G}v(t) = {}_{G}\tilde{\omega}_{B}\,{}^{G}r(t) = {}_{G}\omega_{B} \times {}^{G}r(t) \tag{2-842} $$

Có thể được sử dụng để tìm vector gia tốc của điểm trên vật thể

$$ \begin{aligned} {}^{G}\ddot{r} &= \frac{{}^{G}d}{dt}\,{}_{G}\dot{r}(t) = {}_{G}S_{B}\,{}^{G}r \\ &= {}_{G}\alpha_{B} \times {}^{G}r + {}_{G}\omega_{B} \times ({}_{G}\omega_{B} \times {}^{G}r) \\ &= (\ddot{\phi}\hat{u} + \dot{\phi}\dot{u}) \times {}^{G}r + \dot{\phi}^{2}\hat{u} \times (\hat{u} \times {}^{G}r) \end{aligned} \tag{2-843} $$

${}_{G}\alpha_{B}$ là vector gia tốc góc của vật thể so với khung tọa độ G.

$$ \begin{aligned} {}_{G}\alpha_{B} &= \frac{G}{dt}\,{}_{G}\omega_{B} \\ {}_{G}\tilde{\alpha}_{B} &= {}_{G}\dot{\tilde{\omega}}_{B} \end{aligned} \tag{2-844} $$

Gia tốc ${}^{G}\ddot{r}$ cũng có thể được xác định bằng cách sử dụng ma trận gia tốc góc ${}_{G}\tilde{\alpha}_{B}$ và biến đổi gia tốc quay ${}_{G}S_{B}$.

$$ {}^{G}\ddot{r} = {}_{G}S_{B}\,{}^{G}r \tag{2-845} $$

trong đó,

$$ \begin{aligned} {}_{G}\bar{\alpha}_{B} &= {}_{G}\dot{\bar{\omega}}_{B} = [\ddot{\phi}\tilde{u} + \dot{\phi}\dot{\tilde{u}}] \\ {}_{G}S_{B} &= {}^{G}R_{B}\,{}^{G}\dot{R}_{B} = {}_{G}\bar{\alpha}_{B} + {}_{G}\bar{\omega}_{B}^{2} = \left[\ddot{\phi}\bar{u} + \dot{\phi}\dot{\tilde{u}} + \dot{\phi}^{2}\bar{u}^{2}\right]. \end{aligned} \tag{2-846} $$

Ví dụ 2-135: Vận tốc và gia tốc của một con lắc đơn.

Một khối điểm gắn với một thanh không khối lượng và treo từ một khớp xoay được gọi là một con lắc đơn. Hình 2-108 minh họa một con lắc đơn. Một hệ tọa độ cục bộ B được gắn với con lắc xoay trong một hệ tọa độ toàn cục G. Vector vị trí của trọng lượng và vector vận tốc góc ${}_{G}\omega_{B}$ là

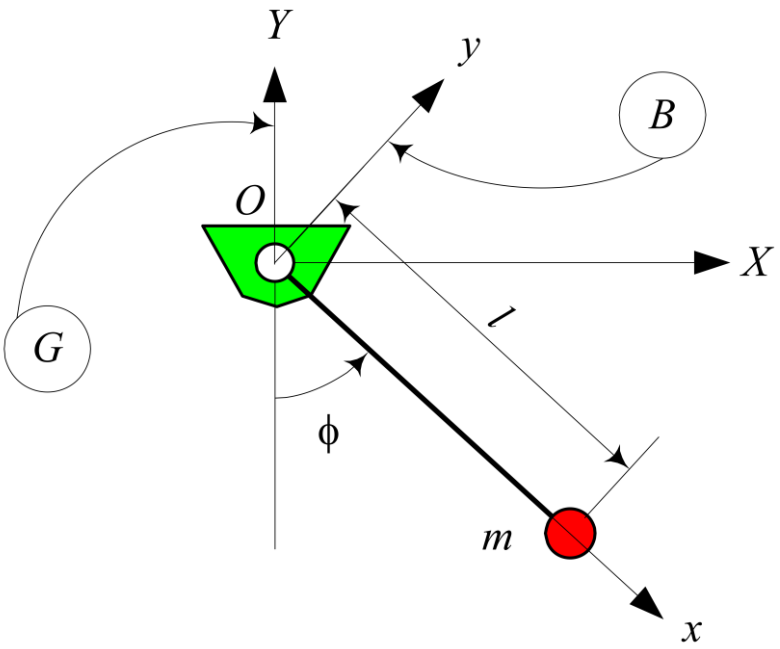
$$ {}^{B}r = l\hat{\imath} \tag{2-847} $$

$$ {}^{G}r = {}^{G}R_B \, {}^{B}r = \begin{bmatrix} lsin\phi \\ -lcos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-848} $$

$$ {}^{B}_{G}\omega_B = \dot{\phi}\hat{k} \tag{2-849} $$

$$ {}_{G}\omega_B = {}^{G}R_B^T \, {}^{B}_{G}\omega_B = \dot{\phi}\hat{K}. \tag{2-850} $$

$$ {}^{G}R_B = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{3}{2}\pi + \phi\right) & -sin\left(\frac{3}{2}\pi + \phi\right) & 0 \\ sin\left(\frac{3}{2}\pi + \phi\right) & cos\left(\frac{3}{2}\pi + \phi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\phi & cos\phi & 0 \\ -cos\phi & sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-851} $$



Hình 2-108 Con lắc đơn.

Vận tốc của nó được xác định bởi

$$ {}^{B}_{G}v = {}^{B}\dot{r} + {}^{B}_{G}\omega_B \times {}^{B}_{G}r = 0 + \dot{\phi}\hat{k} \times l\hat{\imath} = l\dot{\phi}\hat{\jmath} \tag{2-852} $$

$$ {}^{G}v = {}^{G}R_B \, {}^{B}v = \begin{bmatrix} l\dot{\phi}cos\phi \\ l\dot{\phi}sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2-853} $$

Độ gia tốc của trọng lượng sau đó bằng

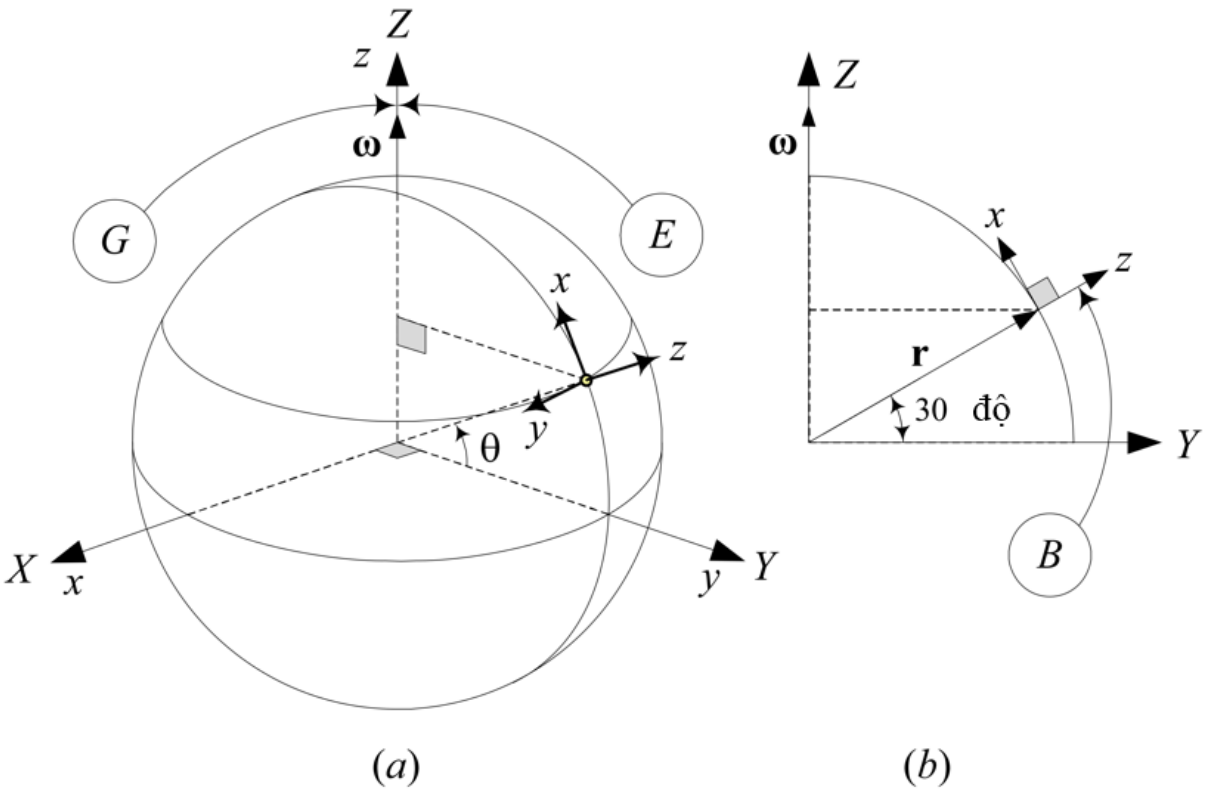
$$ {}^{B}_{G}a = {}^{B}_{G}\dot{v} + {}^{B}_{G}\omega_B \times {}^{B}_{G}v = l\ddot{\phi}\hat{\jmath} + \dot{\phi}\hat{k} \times l\dot{\phi}\hat{\jmath} = l\ddot{\phi}\hat{\jmath} - l\dot{\phi}^{\,2}\hat{\imath} \tag{2-854} $$

$$ {}^{G}a = {}^{G}R_B \, {}^{B}a = \begin{bmatrix} l\ddot{\phi}cos\phi - l\dot{\phi}^2 sin\phi \\ l\ddot{\phi}sin\phi + l\dot{\phi}^2 cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2-855} $$

Ví dụ 2-136: Chuyển động của một phương tiện trên Trái đất.

Xem xét chuyển động của một phương tiện trên Trái đất tại vĩ độ 30 độ và hướng bắc, như được hiển thị trong Hình 2-109. Phương tiện có vận tốc $v = {}^{B}_{E}\dot{r} = 80\ km/h = 22.22\ m/s$ và gia tốc $a = {}^{B}_{E}\ddot{r} = 0.1\ m/s^2$, cả hai đều so với mặt đường. Bán kính của Trái đất là R, và do đó, động học của phương tiện là:

$$ {}^{B}_{E}r = R\hat{k}\,m \qquad {}^{B}_{E}\dot{r} = 22.22\hat{\imath}\,m/s \qquad {}^{B}_{E}\ddot{r} = 0.1\hat{\imath}\,m/s^2 $$
$$ \dot{\theta} = \frac{v}{R}\frac{rad}{s} \qquad \ddot{\theta} = \frac{a}{R}\,rad/s^2. \tag{2-856} $$



Hình 2-109 Chuyển động của một phương tiện tại vĩ độ 30 độ và hướng đi về phía bắc trên Trái đất [1].

Có ba hệ tọa độ liên quan đến nhau. Một hệ tọa độ vật thể B được gắn vào phương tiện như được thể hiện trong hình. Một hệ tọa độ toàn cục G được thiết lập tại trung tâm của Trái đất. Một hệ tọa độ địa phương E khác được cố định gắn vào Trái đất và quay theo với Trái đất. Các khung tọa độ E và G được giả định trùng nhau vào thời điểm này. Vận tốc góc của B là

$$ \begin{aligned} {}^{B}_{G}\omega_B &= {}_{G}\omega_E + {}^{G}_{E}\omega_B = {}^{B}R_G\left(\omega_E\hat{K} + \dot{\theta}\hat{I}\right) \\ &= (\omega_E cos\,\theta)\hat{\imath} + (\omega_E sin\,\theta)\hat{k} + \dot{\theta}\hat{\jmath} \\ &= (\omega_E cos\,\theta)\hat{\imath} + (\omega_E sin\,\theta)\hat{k} + \frac{v}{R}\hat{\jmath}. \end{aligned} \tag{2-857} $$

Do đó, vận tốc và gia tốc của xe là

$$
\begin{aligned}
{}^B_G v &= {}^B\dot{r} + {}^B_G\omega_B \times {}^B_G r = 0 + {}^B_G\omega_B \times R\hat{k} \\
&= v\hat{\imath} - (R\omega_E \cos\theta)\hat{\jmath} \\
{}^B_G a &= {}^B_G\dot{v} + {}^B_G\omega_B \times {}^B_G v \\
&= a\hat{\imath} + \left(R\omega_E\dot{\theta}\sin\theta\right)\hat{\jmath} + \begin{bmatrix} \omega_E\cos\theta \\ \dfrac{v}{R} \\ \omega_E \sin\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \\ -R\omega_E\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= a\hat{\imath} + \left(R\omega_E\dot{\theta}\sin\theta\right)\hat{\jmath} + \begin{bmatrix} R\omega_E^2\cos\theta\sin\theta \\ v\omega_E\sin\theta \\ -\dfrac{1}{R}v^2 - R\omega_E^2\cos^2\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + R\omega_E^2\cos\theta\sin\theta \\ 2R\omega_E\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dfrac{1}{R}v^2 - R\omega_E^2\cos^2\theta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2-858}
$$

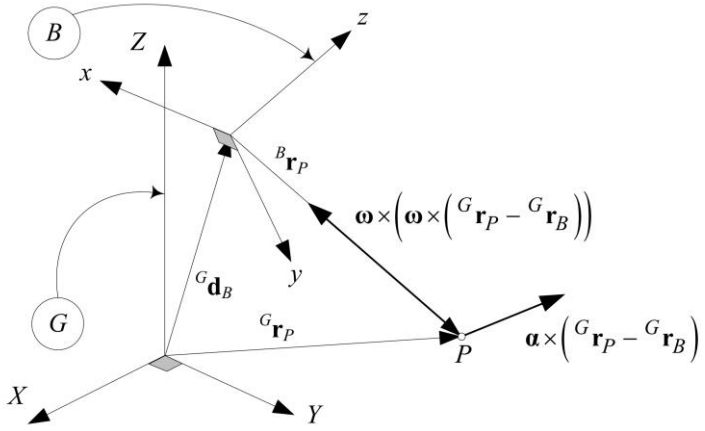
Thuật ngữ $a\hat{\imath}$ là gia tốc tương đối so với Trái đất, $\left(2R\omega_E\dot{\theta}\sin\theta\right)\hat{\jmath}$ là gia tốc Coriolis, $-\frac{v^2}{R}\hat{k}$ là gia tốc ly tâm do di chuyển, và $-(R\omega_E^2\cos^2\theta)$ là gia tốc ly tâm do quay của Trái đất. Thay thế các giá trị số và chấp nhận $R = 6.3677 \times 10^6\ m$.

$$
\begin{aligned}
{}^B_G v &= 22.22\hat{\imath} - 6.3677 \times 10^6 \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\frac{366.25}{365.25}\right) cos\frac{\pi}{6}\hat{\jmath} \\
&= 22.22\hat{\imath} - 402.13\hat{\jmath}\ m/s
\end{aligned}
\tag{2-859}
$$

$$
{}^B_G a = 1.5662 \times 10^{-2}\hat{\imath} + 1.6203 \times 10^{-3}\hat{\jmath} - 2.5473 \times 10^{-2}\hat{k}\ m/s^2 \tag{2-860}
$$

2.8.3. Gia tốc vật thể rắn

Xem xét một khối cứng với một hệ tọa độ cục bộ $B(oxyz)$ di chuyển tự do trong một hệ tọa độ toàn cục cố định $G(OXYZ)$. Khối cứng có thể quay trong hệ toàn cục, trong khi gốc của hệ tọa độ B có thể dịch chuyển tương đối so với gốc của G. Các tọa độ của một điểm trên vật thể P trong các hệ toàn cục và cục bộ, như được hiển thị trong Hình 2-110, được liên kết bằng phương trình sau đây.



Hình 2-110 Vật rắn với hệ tọa độ B (oxyz) di chuyển tự do trong một hệ tọa độ toàn cục cố định G (OXYZ).

$$ {}^{G}r_P = {}^{G}R_B\,{}^{B}r_P + {}^{G}d_B \tag{2-861}$$

trong đó ${}^{G}\mathrm{d}_B$ cho biết vị trí của gốc di chuyển o so với nguồn gốc cố định O.

Gia tốc của điểm P tại G là

$$\begin{aligned} {}^{G}a_P = {}^{G}\dot{v}_P &= {}^{G}\ddot{r}_P \\ &= {}_{G}\alpha_B \times ({}^{G}r_P - {}^{G}d_B) \\ &\quad + {}_{G}\omega_B \times \left({}_{G}\omega_B \times ({}^{G}r_P - {}^{G}d_B)\right) + {}^{G}\ddot{d}_B. \end{aligned} \tag{2-862}$$

Ví dụ 2-137: Gia tốc của một điểm trên vật thể.

Xem xét một vật thể rắn đang di chuyển và xoay trong một hệ toạ độ toàn cục. Gia tốc của một điểm trên vật thể có thể được tìm bằng cách lấy đạo hàm hai lần theo thời gian vector vị trí của nó.

$$ {}^{G}r_P = {}^{G}R_B\,{}^{B}r_P + {}^{G}d_B \tag{2-863}$$

$$ {}^{G}\dot{r}_P = {}^{G}\dot{R}_B\,{}^{B}r_P + {}^{G}\dot{d}_B \tag{2-864}$$

$$\begin{aligned} {}^{G}\ddot{r}_P &= {}^{G}\ddot{R}_B\,{}^{B}r_P + {}^{G}\ddot{d}_B \\ &= {}^{G}\ddot{R}_B\,{}^{G}R_B^T({}^{G}\mathrm{r}_P - {}^{G}\mathrm{d}_B) + {}^{G}\ddot{\mathrm{d}}_B. \end{aligned} \tag{2-865}$$

Tích phân ma trận vận tốc góc

$$ {}_{G}\tilde{\omega}_B = {}^{G}\dot{R}_B\,{}^{G}R_B^T \tag{2-866}$$

thấy rằng

$$\begin{aligned} {}_{G}\dot{\tilde{\omega}}_B &= \frac{{}^{G}d}{dt}G\tilde{\omega}_B = {}^{G}\ddot{R}_B\,{}^{G}R_B^T + {}^{G}\dot{R}_B\,{}^{G}\dot{R}_B^T \\ &= {}^{G}\ddot{R}_B\,{}^{G}R_B^T + {}_{G}\tilde{\omega}_B\tilde{\omega}_B^T \end{aligned} \tag{2-867}$$

và do đó,

$$ {}^{G}\ddot{R}_B\,{}^{G}R_B^T = {}_{G}\dot{\tilde{\omega}}_B - {}_{G}\tilde{\omega}_B\,{}_{G}\tilde{\omega}_B^T. \tag{2-868}$$

Do đó, vector gia tốc của điểm trên vật thể trở thành

$$ {}^{G}\ddot{r}_P = ({}_{G}\dot{\tilde{\omega}}_B - {}_{G}\tilde{\omega}_{BG}\tilde{\omega}_B^T)({}^{G}r_P - {}^{G}d_B) + {}^{G}\ddot{d}_B \tag{2-869}$$

trong đó

$$ {}_{G}\dot{\omega}_B = {}_{G}\dot{\tilde{\alpha}}_B = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-870}$$

và

$$ {}_{G}\bar{\omega}_{BG}\bar{\omega}_B^T = \begin{bmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & -\omega_1\omega_2 & -\omega_1\omega_3 \\ -\omega_1\omega_2 & \omega_1^2 + \omega_3^2 & -\omega_2\omega_3 \\ -\omega_1\omega_3 & -\omega_2\omega_3 & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{bmatrix}. \tag{2-871}$$

Ví dụ 2-138: Gia tốc của khớp 2 của một tay máy phẳng 2R.

Một cánh tay robot phẳng 2R được minh họa trong Hình 2-41. Khớp khuỷu của nó có chuyển động tròn quanh khớp cơ sở. Biết rằng

$$ {}_0\omega_1 = \dot{\theta}_1 \, {}^0\hat{k}_0 \tag{2-872} $$

chúng ta có thể viết

$$ \begin{aligned} {}_0\alpha_1 &= {}_0\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 \, {}^0\hat{k}_0 \\ {}_0\dot{\omega}_1 \times {}^0r_1 &= \ddot{\theta}_1 \, {}^0\hat{k}_0 \times {}^0r_1 = \ddot{\theta}_1 R_{Z,\theta+90} \, {}^0r_1 \\ {}_0\omega_1 \times ({}_0\omega_1 \times {}^0r_1) &= -\dot{\theta}_1^2 \, {}^0r_1 \end{aligned} \tag{2-873} $$

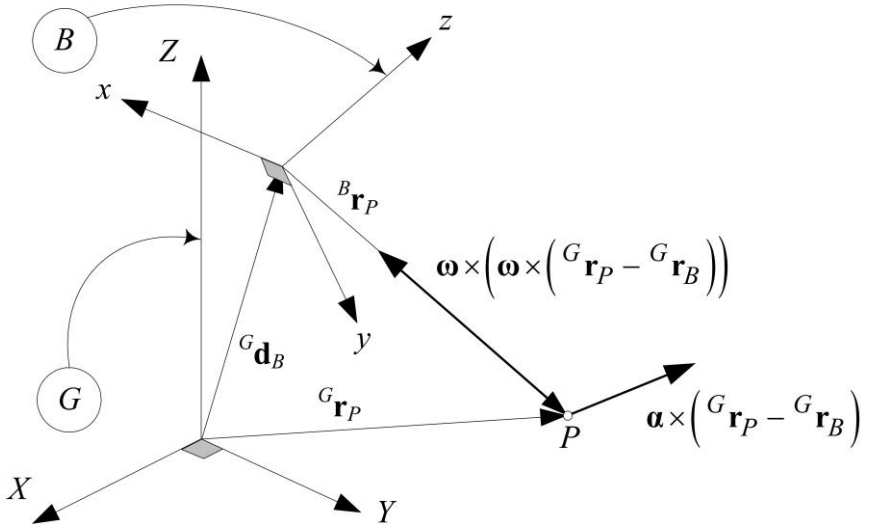
và tính toán gia tốc của khớp khuỷu tay.

$$ {}^0\ddot{r}_1 = \ddot{\theta}_1 R_{Z,\theta+90} \, {}^0r_1 - \dot{\theta}_1^2 \, {}^0r_1. \tag{2-874} $$

Ví dụ 2-139: Gia tốc của một điểm đang di chuyển trong khung tọa độ vật thể đang di chuyển.

Giả sử điểm P trong Hình 2-111 được xác định bằng một vector vị trí cục bộ biến thiên theo thời gian ${}^Br_P(t)$. Sau đó, vận tốc và gia tốc của P có thể được tìm bằng cách áp dụng công thức biến đổi đạo hàm.

$$ \begin{aligned} {}^Gv_P &= {}^G\dot{d}_B + {}^B\dot{r}_P + {}^B_G\omega_B \times {}^Br_P \\ &= {}^G\dot{d}_B + {}^Bv_P + {}^B_G\omega_B \times {}^Br_P \\ {}^Ga_P &= {}^G\ddot{d}_B + {}^B\ddot{r}_P + {}^B_G\omega_B \times {}^B_B\dot{r}_P + {}^B_G\dot{\omega}_B \times {}^Br_P \\ &\quad + {}^B_G\omega_B \times ({}^B\dot{r}_P + {}^B_G\omega_B \times {}^Br_P) \\ &= {}^G\vec{d}_B + {}^Ba_P + 2\,{}^B_G\omega_B \times {}^Bv_P + {}^B_G\dot{\omega}_B \times {}^Br_P \\ &\quad + {}^B_G\omega_B \times ({}^B_G\omega_B \times {}^Br_P). \end{aligned} \tag{2-875} $$



Hình 2-111 Một vật thể rắn với hệ tọa độ $B(oxyz)$ di chuyển tự do trong một hệ tọa độ toàn cục cố định $G(OXYZ)$.

Cũng có thể lấy đạo hàm của Phương trình ${}^Gr_P = {}^GR_B \, {}^Br_P + {}^Gd_B$ với giả định ${}^B\dot{r}_P \neq 0$ và tìm gia tốc của P.

$$
\begin{aligned}
&{}^{G}r_P = {}^{G}R_B\,{}^{B}r_P + {}^{G}d_B \\
&{}^{G}\dot{r}_P = {}^{G}\dot{R}_B\,{}^{B}r_P + {}^{G}R_B\,{}^{B}\dot{r}_P + {}^{G}\dot{d}_B \\
&= {}_{G}\omega_B \times {}^{G}R_B\,{}^{B}r_P + {}^{G}R_B\,{}^{B}\dot{r}_P + {}^{G}\dot{d}_B \\
&{}^{G}\ddot{r}_P = {}_{G}\dot{\omega}_B \times {}^{G}R_B\,{}^{B}r_P + {}_{G}\omega_B \times {}^{G}\dot{R}_B\,{}^{B}r_P + {}_{G}\omega_B \times {}^{G}R_B\,{}^{B}\dot{r}_P \\
&+ {}^{G}\dot{R}_B\,{}^{B}\dot{r}_P + {}^{G}R_B\,{}^{B}\ddot{r}_P + {}^{G}\ddot{d}_B \\
&= {}_{G}\dot{\omega}_B \times {}^{G}_{B}r_P + {}_{G}\omega_B \times ({}_{G}\omega_B \times {}^{G}r_P) + 2\,{}_{G}\omega_B \times {}^{G}_{B}\dot{r}_P \\
&+ {}^{G}_{B}\ddot{r}_P + {}^{G}\ddot{d}_B
\end{aligned}
\tag{2-876}
$$

Cụm thứ ba ở phía bên phải được gọi là gia tốc Coriolis. Gia tốc Coriolis vuông góc với cả ${}_{G}\omega_B$ và ${}^{B}\dot{r}_P$.

2.8.4. Ma trận biến đổi gia tốc

Xem xét chuyển động của một vật thể rắn B trong hệ tọa độ toàn cục G, như được hiển thị trong Hình 2-111. Giả sử hệ tọa độ cố định của vật thể $B(oxyz)$ trùng với hệ tọa độ toàn cục $G(OXYZ)$ tại một thời điểm ban đầu t_0 nào đó. Tại mọi thời điểm $t \neq t_0$, B không nhất thiết phải trùng với G, và do đó, ma trận biến đổi đồng nhất ${}^{G}T_B(t)$ là biến thiên theo thời gian.

Gia tốc của một điểm trên vật thể trong hệ tọa độ toàn cục có thể được tìm thấy bằng cách áp dụng ma trận biến đổi gia tốc đồng nhất.

$$
{}^{G}a_P(t) = {}^{G}A_B\,{}^{G}r_P(t) \tag{2-877}
$$

Cụ thể, sau đây ${}^{G}A_B$ là ma trận biến đổi gia tốc

$$
{}^{G}A_B = \begin{bmatrix} {}_{G}\tilde{\alpha}_B - \tilde{\omega}\tilde{\omega}^T & {}^{G}\ddot{d}_B - ({}_{G}\tilde{\alpha}_B - \tilde{\omega}\tilde{\omega}^T)\,{}^{G}d_B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2-878}
$$

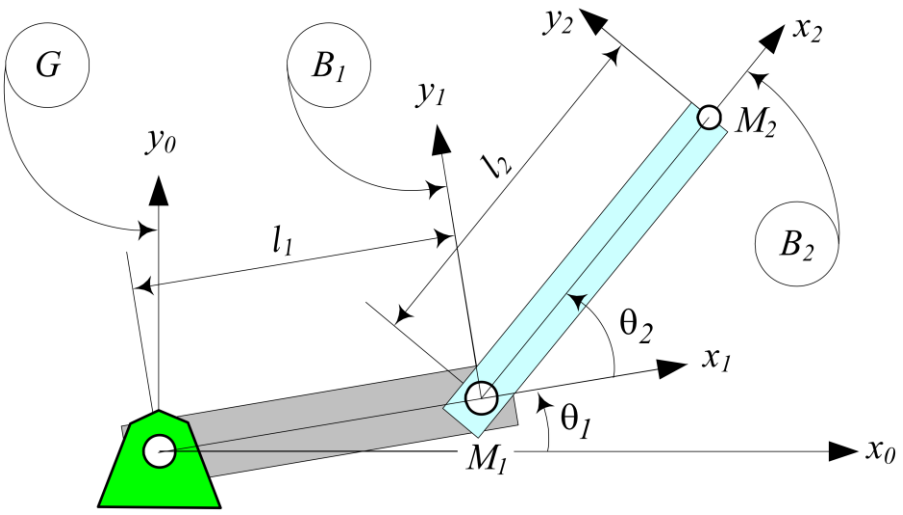
Ví dụ 2-140: Động học bàn kẹp của cánh tay robot phẳng $R \parallel R$.

Hình 2-112 minh họa một cánh tay robot phẳng $R \parallel R$ với biến khớp là θ_1 và θ_2. Các khâu (1) và (2) đều là $R \parallel R(0)$ và do đó, các ma trận biến đổi ${}^{0}T_1$, ${}^{1}T_2$, và ${}^{0}T_2$ là:

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1 cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & l_1 sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-879}
$$

$$
{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2 cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-880}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{0}T_2 = {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2 \\
&= \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_2 c(\theta_1+\theta_2) + l_1 c\theta_1 \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_2 s(\theta_1+\theta_2) + l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-881}
$$



Hình 2-112 Cánh tay robot phẳng R//R với biến khớp θ_1 và θ_2.

Các điểm M_1 và M_2 nằm ở:

$$ {}^0r_{M_1} = \begin{bmatrix} l_1 cos\theta_1 \\ l_1 sin\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^1r_{M_2} = \begin{bmatrix} l_2 cos\theta_2 \\ l_2 sin\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-882} $$

$$ {}^0r_{M_2} = {}^0T_1 \, {}^1r_{M_2} = \begin{bmatrix} l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 cos\,\theta_1 \\ l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 sin\,\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-883} $$

Để xác định vận tốc và gia tốc của M_2, chúng ta cần tính toán ${}^0\dot{T}_2$, có thể được tính bằng việc vi phân trực tiếp của ${}^0T_2$.

$$ \begin{aligned} {}^0\dot{T}_2 &= \frac{d}{dt} {}^0T_2 \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_{12} s\theta_{12} & -\dot{\theta}_{12} c\theta_{12} & 0 & -l_2\dot{\theta}_{12} s\theta_{12} - \dot{\theta}_1 l_1 s\theta_1 \\ \dot{\theta}_{12} c\theta_{12} & -\dot{\theta}_{12} s\theta_{12} & 0 & l_2\dot{\theta}_{12} c\theta_{12} + \dot{\theta}_1 l_1 c\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \theta_{12} &= \theta_1 + \theta_2 \\ \dot{\theta}_{12} &= \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{aligned} \tag{2-884} $$

Chúng ta cũng có thể tính toán ${}^0\dot{T}_2$ từ ${}^0T_2 = {}^0T_1 \, {}^1T_2$ bằng quy tắc chuỗi.

$$ {}^0\dot{T}_2 = \frac{d}{dt}({}^0T_1 \, {}^1T_2) = {}^0\dot{T}_1 \, {}^1T_2 + {}^0T_1 \, {}^1\dot{T}_2 \tag{2-885} $$

trong đó,

$$ {}^0\dot{T}_1 = \dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -sin\theta_1 & -cos\theta_1 & 0 & -l_1 sin\theta_1 \\ cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1 cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-886} $$

$$ {}^{1}\dot{T}_2 = \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -sin\theta_2 & -cos\theta_2 & 0 & -l_2 sin\theta_2 \\ cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2 cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}887) $$

Với ${}^{0}\dot{T}_1$ và ${}^{1}\dot{T}_2$, chúng ta có thể tìm ma trận biến đổi vận tốc ${}^{0}V_1$ và ${}^{1}V_2$ bằng cách sử dụng ${}^{0}T_1^{-1}$ và ${}^{1}T_2^{-1}$.

$$ {}^{0}T_1^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & sin\theta_1 & 0 & -l_1 \\ -sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}888) $$

$$ {}^{1}T_2^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & sin\theta_2 & 0 & -l_2 \\ -sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}889) $$

$$ {}^{0}V_1 = {}^{0}\dot{T}_1 \, {}^{0}T_1^{-1} = \dot{\theta}_1 \, {}^{0}_{1}\tilde{k} \quad (2\text{-}890) $$

$$ {}^{1}V_2 = {}^{1}\dot{T}_2 \, {}^{1}T_2^{-1} = \dot{\theta}_2 \, {}^{1}_{2}\tilde{k} \quad (2\text{-}891) $$

Bây giờ, chúng ta có thể xác định vận tốc của các điểm M_1 và M_2 trong B_0 và B_1 tương ứng.

$$ {}^{0}v_{M_1} = {}^{0}V_1 \, {}^{0}r_{M_1} = \dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 \\ l_1 cos\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}892) $$

$$ {}^{1}v_{M_2} = {}^{1}V_2 \, {}^{1}r_{M_2} = \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -l_2 sin\theta_2 \\ l_2 cos\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}893) $$

Để xác định vận tốc của điểm đầu M_2 trong hệ cơ sở, chúng ta có thể sử dụng phép cộng vector vận tốc.

$$ \begin{aligned} {}^{0}v_{M_2} &= {}^{0}v_{M_1} + {}^{0}_{1}v_{M_2} = {}^{0}v_{M_1} + {}^{0}T_1 \, {}^{1}v_{M_2} \\ &= \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) - \dot{\theta}_1 l_1 sin\theta_1 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) + \dot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}894) $$

Chúng ta cũng có thể xác định ${}^{0}v_{M_2}$ bằng cách sử dụng ma trận biến đổi vận tốc ${}^{0}V_2$.

$$ {}^{0}v_{M_2} = {}^{0}V_2 \, {}^{0}r_{M_2} \quad (2\text{-}895) $$

Trong đó, ma trận biến đổi vận tốc ${}^{0}V_2$ là:

$$ {}^{0}V_2 = {}^{0}\dot{T}_2 \, {}^{0}T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 & 0 & \dot{\theta}_2 l_1 sin\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 & -\dot{\theta}_2 l_1 cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}896) $$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}T_{2}^{-1} &= {}^{2}T_{1}\,{}^{1}T_{0} = {}^{1}T_{2}^{-1}\,{}^{0}T_{1}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} cos(\theta_1+\theta_2) & sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & -l_2 - l_1 cos\theta_2 \\ -sin(\theta_1+\theta_2) & cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-897}
$$

Thêm vào đó, chúng ta có thể xác định ma trận biến đổi vận tốc ${}^{0}V_{2}$ bằng cách sử dụng quy tắc cộng của chúng.

$$
{}^{0}V_{2} = {}^{0}V_{1} + {}^{0}_{1}V_{2} \tag{2-898}
$$

trong đó,

$$
{}^{0}_{1}V_{2} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}V_{2}\,{}^{0}T_{1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 & \dot{\theta}_2 l_1 sin\theta_1 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 & -\dot{\theta}_2 l_1 cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-899}
$$

Vì vậy, ${}^{0}v_{M_2}$ sẽ là:

$$
{}^{0}v_{M_2} = {}^{0}V_{2}\,{}^{0}r_{M_2} \tag{2-900}
$$

Để xác định gia tốc của M_2, chúng ta cần tính toán ${}^{0}\ddot{T}_{2}$, có thể tính bằng vi phân trực tiếp của ${}^{0}\dot{T}_{2}$.

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\ddot{T}_{2} &= \frac{d}{dt}\,{}^{0}\dot{T}_{2} = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}({}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}) = \frac{d}{dt}({}^{0}\dot{T}_{1}\,{}^{1}T_{2} + {}^{0}T_{1}\,{}^{1}\dot{T}_{2}) \\
&= {}^{0}\ddot{T}_{1}\,{}^{1}T_{2} + 2\,{}^{0}\dot{T}_{1}\,{}^{1}\dot{T}_{2} + {}^{0}T_{1}\,{}^{1}\ddot{T}_{2}
\end{aligned} \tag{2-901}
$$

Chúng ta có,

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\ddot{T}_{1} &= \frac{d}{dt}\,{}^{0}\dot{T}_{1} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 c\theta_1 - \ddot{\theta}_1 s\theta_1 & \dot{\theta}_1^2 s\theta_1 - \ddot{\theta}_1 c\theta_1 & 0 & -\ddot{\theta}_1 l_1 s\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 c\theta_1 \\ \ddot{\theta}_1 c\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 s\theta_1 & -\dot{\theta}_1^2 c\theta_1 - \ddot{\theta}_1 s\theta_1 & 0 & l_1\ddot{\theta}_1 c\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-902}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\ddot{T}_{2} &= \frac{d}{dt}\,{}^{1}\dot{T}_{2} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2^2 c\theta_2 - \ddot{\theta}_2 s\theta_2 & \dot{\theta}_2^2 s\theta_2 - \ddot{\theta}_2 c\theta_2 & 0 & -\ddot{\theta}_2 l_2 s\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 c\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 c\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 s\theta_2 & -\dot{\theta}_2^2 c\theta_2 - \ddot{\theta}_2 s\theta_2 & 0 & \ddot{\theta}_2 l_2 c\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-903}
$$

và do đó,

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\ddot{T}_{2} &= {}^{0}\ddot{T}_{1}\,{}^{1}T_{2} + 2\,{}^{0}\dot{T}_{1}\,{}^{1}\dot{T}_{2} + {}^{0}T_{1}\,{}^{1}\ddot{T}_{2} \\
&= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-904}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= -\dot{\theta}_{12}^2 cos\theta_{12} - \ddot{\theta}_{12} sin\theta_{12} \\
r_{21} &= -\dot{\theta}_{12}^2 sin\theta_{12} + \ddot{\theta}_{12} cos\theta_{12} \\
r_{12} &= \dot{\theta}_{12}^2 sin\theta_{12} - \ddot{\theta}_{12} cos\theta_{12} \\
r_{22} &= -\dot{\theta}_{12}^2 cos\theta_{12} - \ddot{\theta}_{12} sin\theta_{12} \\
r_{14} &= -\dot{\theta}_{12}^2 l_2 cos\theta_{12} - \ddot{\theta}_{12} l_2 sin\theta_{12} - \dot{\theta}_1^2 l_1 cos\theta_1 - \ddot{\theta}_1 l_1 sin\theta_1 \\
r_{24} &= \ddot{\theta}_{12} l_2 cos\theta_{12} - \dot{\theta}_{12}^2 l_2 sin\theta_{12} - \dot{\theta}_1^2 l_1 sin\theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1.
\end{aligned} \tag{2-905}
$$

Có ${}^0\ddot{T}_1$, ${}^1\ddot{T}_2$, và ${}^0\ddot{T}_2$, chúng ta có thể tìm các ma trận biến đổi gia tốc ${}^0A_1$, ${}^1A_2$, và ${}^0A_2$ bằng cách sử dụng ${}^0T_1^{-1}$, ${}^1T_2^{-1}$, và ${}^0T_2^{-1}$.

$$
{}^0A_1 = {}^0\ddot{T}_1 \, {}^0T_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 & -\ddot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ \ddot{\theta}_1 & -\dot{\theta}_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-906}
$$

$$
{}^1A_2 = {}^1\ddot{T}_2 \, {}^1T_2^{-1} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2^2 & -\ddot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ \ddot{\theta}_2 & -\dot{\theta}_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-907}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0A_2 &= {}^0\ddot{T}_2 \, {}^0T_2^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_{12}^2 & -\ddot{\theta}_{12} & 0 & l_1\dot{\theta}_2^2 cos\theta_1 + 2\theta_1\dot{\theta}_2 l_1 cos\theta_1 + \ddot{\theta}_2 l_1 sin\theta_1 \\ \ddot{\theta}_{12} & -\dot{\theta}_{12}^2 & 0 & l_1\dot{\theta}_2^2 sin\theta_1 + 2\theta_1\dot{\theta}_2 l_1 sin\theta_1 - \ddot{\theta}_2 l_1 cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-908}
$$

Bây giờ, chúng ta có thể xác định vận tốc của các điểm M_1 và M_2 trong B_0 và B_1 tương ứng.

$$
{}^0a_{M_1} = {}^0A_1 \, {}^0r_{M_1} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 cos\theta_1 - \ddot{\theta}_1 l_1 sin\theta_1 \\ \ddot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 l_1 sin\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-909}
$$

$$
{}^1a_{M_2} = {}^1A_2 \, {}^1r_{M_2} = \begin{bmatrix} -l_2\dot{\theta}_2^2 cos\theta_2 - \ddot{\theta}_2 l_2 sin\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 l_2 cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 l_2 sin\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-910}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0a_{M_2} &= {}^0A_2 \, {}^0r_{M_2} \\
&= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_{12} l_2 (cos\theta_{12} + sin\theta_{12}) - \dot{\theta}_1^2 l_1 cos\theta_1 - \ddot{\theta}_1 l_1 sin\theta_1 \\ \ddot{\theta}_{12} l_2 (cos\theta_{12} - sin\theta_{12}) - \dot{\theta}_1^2 l_1 sin\theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-911}
$$

2.8.5. Động học gia tốc thuận

Vấn đề động học gia tốc thuận là phương pháp liên quan giữa gia tốc của các khớp, q̈, với gia tốc của khâu chấp hành cuối Ẍ. Đó là

$$
\ddot{X} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \tag{2-912}
$$

Trong đó, J là ma trận Jacobian, q là vector biến số khớp, q̇ là vector vận tốc của khớp, và q̈ là vector gia tốc của khớp.

$$\begin{aligned} q &= [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \cdots \quad q_n]^T \\ \dot{q} &= [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T \\ \ddot{q} &= [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_3 \quad \cdots \quad \ddot{q}_n]^T \end{aligned} \tag{2-913}$$

Tuy nhiên, Ẋ và Ẍ lần lượt là các vector vận tốc và gia tốc của khâu chấp hành cuối.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} {}^0v_n \\ {}^0\omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{d}_n \\ {}^0\omega_n \end{bmatrix} \\ &= [\dot{X}_n \quad \dot{Y}_n \quad \dot{Z}_n \quad \omega_{Xn} \quad \omega_{Yn} \quad \omega_{Zn}]^T \end{aligned} \tag{2-914}$$

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \begin{bmatrix} {}^0a_n \\ {}^0\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\ddot{d}_n \\ {}^0\dot{\omega}_n \end{bmatrix} \\ &= [\ddot{X}_n \quad \ddot{Y}_n \quad \ddot{Z}_n \quad \dot{\omega}_{Xn} \quad \dot{\omega}_{Yn} \quad \dot{\omega}_{Zn}]^T \end{aligned} \tag{2-915}$$

Vì việc tính đạo hàm thời gian của ma trận Jacobian, [J̇], không đơn giản nói chung, để tìm đạt được động học gia tốc thuận thì tốt hơn là sử dụng công thức

$${}^0_{i-1}\dot{d}_i = \begin{cases} {}^0_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i & \text{nếu khớp } i \text{ là } R \\ \dot{d}_i \, {}^0\hat{k}_{i-1} + {}^0_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i & \text{nếu khớp } i \text{ là } P \end{cases} \tag{2-916}$$

$${}^0_{i-1}\omega_i = \begin{cases} \dot{\theta}_i \, {}^0\hat{k}_{i-1} & \text{nếu khớp } i \text{ là } R \\ 0 & \text{nếu khớp } i \text{ là } P \end{cases} \tag{2-917}$$

Và lấy đạo hàm để tìm gia tốc của khâu (i) so với khâu trước đó $(i-1)$.

$${}^0_{i-1}\ddot{d}_i = \begin{cases} {}^0_0\dot{\omega}_i \times {}^0_{i-1}d_i + {}^0_0\omega_i \times \left({}^0_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i\right) & \text{nếu khớp } i \text{ là } R \\ {}^0_0\dot{\omega}_i \times {}^0_{i-1}d_i + {}^0_0\omega_i \times \left({}^0_0\omega_i \times {}^0_{i-1}d_i\right) & \\ \quad + \ddot{d}_i \, {}^0\hat{k}_{i-1} + 2\dot{d}_i \, {}^0_0\omega_{i-1} \times {}^0\hat{k}_{i-1} & \text{nếu khớp } i \text{ nếu khớp } P \end{cases} \tag{2-918}$$

$${}^0_{i-1}\dot{\omega}_i = \begin{cases} \ddot{\theta}_i \, {}^0\hat{k}_{i-1} + \dot{\theta}_i \, {}^0_0\omega_{i-1} \times {}^0\hat{k}_{i-1} & \text{nếu khớp } i \text{ là } R \\ 0 & \text{nếu khớp } i \text{ là } P \end{cases} \tag{2-919}$$

Do đó, các vector gia tốc của khung tọa độ của khâu chấp hành cuối là

$${}^0_0\ddot{d}_n = \sum_{i=1}^{n} {}^0_{i-1}\ddot{d}_i \tag{2-920}$$

và

$${}^0_0\dot{\omega}_n = \sum_{i=1}^{n} {}^0_{i-1}\omega_i. \tag{2-921}$$

Mối quan hệ gia tốc cũng có thể được sắp xếp lại dưới dạng đệ quy.

$$ {}^{0}_{i-1}\dot{\omega}_i = \begin{cases} \ddot{\theta}_i\, {}^{0}\hat{k}_{i-1} + \dot{\theta}_i\, {}^{0}_{0}\omega_{i-1} \times {}^{0}\hat{k}_{i-1} & \text{nếu khớp } i \text{ là } R \\ 0 & \text{nếu khớp } i \text{ là } P \end{cases} \quad (2\text{-}922) $$

Ví dụ 2-141: Gia tốc thuận của tay máy phẳng 2R.

Vận tốc thuận của cánh tay robot phẳng 2R được tìm thấy như sau:

$$ \begin{aligned} \dot{X} &= J\dot{q} \\ \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1+\theta_2) & -l_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2) & l_2 c(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2\text{-}923) $$

Đạo hàm của ma trận Jacobian là

$$ \dot{J} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{11} & \dot{J}_{12} \\ \dot{J}_{21} & \dot{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}924) $$

trong đó

$$ \begin{aligned} \dot{J}_{11} &= \left(-l_1 cos\theta_1 - l_2 cos(\theta_1+\theta_2)\right)\dot{\theta}_1 - l_2 cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{J}_{12} &= -l_2 cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1 - l_2 cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{J}_{21} &= \left(-l_1 sin\theta_1 - l_2 sin(\theta_1+\theta_2)\right)\dot{\theta}_1 - l_2 sin(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{J}_{22} &= -l_2 sin(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1 - l_2 sin(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (2\text{-}925) $$

Do đó, các động học gia tốc thuận của cánh tay máy có thể được sắp xếp lại dưới dạng

$$ \ddot{X} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \quad (2\text{-}926) $$

Nhưng đối với tay máy 2R, việc hiển thị gia tốc dưới dạng này dễ dàng hơn.

$$ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 & -l_2 sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 cos\theta_1 & l_2 cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} l_1 cos\theta_1 & l_2 cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 sin\theta_1 & l_2 sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2\text{-}927) $$

Ví dụ 2-142: Gia tốc dựa trên vector vị trí.

Giả sử vector vị trí r của khâu chấp hành cuối của một robot có được như là hàm của các tọa độ khớp của nó q.

$$ r = \begin{bmatrix} r_1(q) \\ r_2(q) \\ r_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(q_1,q_2,q_3) \\ r_2(q_1,q_2,q_3) \\ r_3(q_1,q_2,q_3) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}928) $$

Vận tốc của khâu chấp hành cuối là:

$$ \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q}\dot{q} = J_D\dot{q} \quad (2\text{-}929) $$

trong đó,

$$ J_D = \frac{\partial r}{\partial q} = \begin{bmatrix} \partial r_1/\partial q_1 & \partial r_1/\partial q_2 & \partial r_1/\partial q_3 \\ \partial r_2/\partial q_1 & \partial r_2/\partial q_2 & \partial r_2/\partial q_3 \\ \partial r_3/\partial q_1 & \partial r_3/\partial q_2 & \partial r_3/\partial q_3 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}930) $$

Đạo hàm bậc hai của r là:

$$\ddot{r} = \frac{\partial r}{\partial q}\ddot{q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)\dot{q} \tag{2-931}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right) &= \frac{d}{dt}J_D = \sum_{i=1}^{3}\frac{dJ_D}{dq_i}\dot{q}_i \\ &= \frac{dJ_D}{dq_1}\dot{q}_1 + \frac{dJ_D}{dq_2}\dot{q}_2 + \frac{dJ_D}{dq_3}\dot{q}_3.\end{aligned} \tag{2-932}$$

2.8.6. Động học gia tốc ngược

Động học gia tốc thuận cho thấy rằng

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} {}^0a_n \\ {}^0\alpha_n \end{bmatrix} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}. \tag{2-933}$$

Giả sử ma trận Jacobian, J, là ma trận vuông và không suy biến, vector gia tốc khớp $\ddot{q}$ có thể được tìm thấy bằng việc nghịch đảo ma trận.

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{X} - \dot{J}\dot{q}) \tag{2-934}$$

Ví dụ 2-143: Gia tốc ngược của tay máy phẳng 2R.

Vận tốc và gia tốc thuận của cánh tay máy hai bậc tự do phẳng 2R được xác định như sau

$$\begin{aligned}\dot{X} &= J\dot{q} \\ \begin{bmatrix}\dot{X} \\ \dot{Y}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1+\theta_2) & -l_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2) & l_2 c(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-935}$$

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= J\ddot{q} + J\dot{q} \\ \begin{bmatrix}\ddot{X} \\ \ddot{Y}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-l_1 sin\theta_1 & -l_2 sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 cos\theta_1 & l_2 cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix}l_1 cos\theta_1 & l_2 cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 sin\theta_1 & l_2 sin(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1^2 \\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-936}$$

Cùng với các ma trận đạo hàm và ma trận nghịch đảo Jacobian như sau.

$$\dot{J} = \begin{bmatrix}-l_1\dot{\theta}_1 c\theta_1 - l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)c(\theta_1+\theta_2) & -l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)c(\theta_1+\theta_2) \\ -l_1\dot{\theta}_1 s\theta_1 - l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)s(\theta_1+\theta_2) & -l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)s(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix} \tag{2-937}$$

$$J^{-1} = \frac{-1}{l_1 l_2 s\theta_2}\begin{bmatrix}-l_2 c(\theta_1+\theta_2) & -l_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2) & l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix} \tag{2-938}$$

Động học gia tốc ngược của tay máy

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{X} - \dot{J}\dot{q}) \tag{2-939}$$

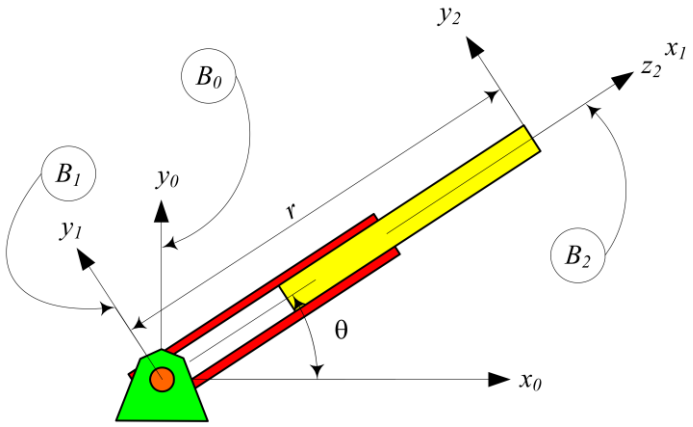
có thể được sắp xếp

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 s\theta_2}\begin{bmatrix} l_2 cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 sin(\theta_1+\theta_2) \\ -l_1 cos\theta_1 & -l_1 sin\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + \frac{1}{l_1 l_2 s\theta_2}\begin{bmatrix} l_1 l_2 cos\theta_1 & l_2^2 \\ -l_1^2 & -l_1 l_2 cos\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix}. \quad (2\text{-}940)$$

Ví dụ 2-144: Gia tốc ngược của tay máy phẳng.

Hình 2-113 minh họa một tay máy phẳng với động học vận tốc thuận.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= J\dot{q} \\ \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}941)$$



Hình 2-113 Tay máy phẳng.

$\dot{X}$ và $\dot{Y}$ là các thành phần của vận tốc toàn cục của điểm tác động cuối và J là đạo hàm của phương trình dịch chuyển của tay máy.

$$J = \begin{bmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{bmatrix} \quad (2\text{-}942)$$

Để xác định gia tốc của khâu chấp hành cuối, chúng ta lấy đạo hàm của (2-941).

$$\ddot{X} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \quad (2\text{-}943)$$

Đạo hàm theo thời gian của ma trận Jacobian là:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}sin\theta & -\dot{r}sin\theta - r\dot{\theta}cos\theta \\ \dot{\theta}cos\theta & \dot{r}cos\theta - r\dot{\theta}sin\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}944)$$

Và do đó, vận tốc thuận của tay máy là:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}sin\theta & -\dot{r}sin\theta - r\dot{\theta}cos\theta \\ \dot{\theta}cos\theta & \dot{r}cos\theta - r\dot{\theta}sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2\text{-}945)$$

Để xác định q̈, chúng ta giải phương trình (2-945) cho $[\ddot{r} \quad \ddot{\theta}]^T$.

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{X} - \dot{J}\dot{q}) \tag{2-946}$$

Nghịch đảo của ma trận Jacobian là:

$$\begin{aligned} J^{-1} &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}sin\theta & -\dot{r}sin\theta - r\dot{\theta}cos\theta \\ \dot{\theta}cos\theta & \dot{r}cos\theta - r\dot{\theta}sin\theta \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -\frac{1}{r}sin\theta & \frac{1}{r}cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-947}$$

Và do đó, vận tốc nghịch của cánh tay robot là:

$$\ddot{q} = J^{-1}\ddot{X} - [J^{-1}J]\dot{q} \tag{2-948}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -\frac{1}{r}sin\theta & \frac{1}{r}cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 0 & -r\dot{\theta} \\ \frac{1}{r}\dot{\theta} & \frac{1}{r}\dot{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-949}$$

2.8.7. Bài tập

1. Một vật thể đang quay quanh các trục chính toàn cục với gia tốc góc hằng số là 2 rad/$giây^2$. Tìm vận tốc và gia tốc toàn cục của một điểm P tại

$$^B\mathrm{r} = \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a. Nếu trục là trục Z, vận tốc góc là 2 rad/giây, và góc quay là $\frac{\pi}{3}$ rad.

b. Nếu trục là trục X, vận tốc góc là 1 rad/giây, và góc quay là $\frac{\pi}{4}$ rad.

c. Nếu trục là trục Y, vận tốc góc là 3 rad/giây, và góc quay là $\frac{\pi}{6}$ rad.

2. Thân robot đang xoay quanh trục Z với gia tốc góc $\ddot{\alpha} = 0.2$ rad/giây^2. Tìm vị trí toàn cục của một điểm tại

$$^B\mathrm{r} = \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Khi sau $t = 3\ giây$ và $\dot{\alpha} = 2$rad/giây, nếu các khung tọa độ vật thể và toàn cục trùng nhau vào $t = 0\ giây$.

3. Một vật thể B đang liên tục xoay trong hệ toạ độ toàn cục G. Ma trận biến đổi có thể được mô phỏng bằng một phép quay α xoay quanh trục Z, tiếp theo là một phép quay β xoay quanh trục X.

a. Xác định trục và góc quay $\hat{u}$ và ϕ như các hàm số của α và β.

b. Xác định xem α và β có thay đổi với tốc độ không đổi, nếu $\hat{u}$ và ϕ cũng thay đổi. Xác định các điều kiện giữ cho $\hat{u}$ không đổi và các điều kiện giữ cho ϕ không đổi.

c. Giả sử $\hat{u}$ là hằng số và $\dot{\phi} = 5$ rad/giây. Xác định $\dot{\alpha}$ và $\dot{\beta}$ khi $\phi = 30$ độ.

d. Xác định $\dot{\phi}$ khi $\alpha = 30$ độ, $\beta = 45$ độ, $\dot{\alpha} = 5$ rad/giây và $\dot{\beta} = 5$ rad/giây.

4. Tìm ma trận gia tốc góc khi khung tọa độ vật thể đang quay -5 độ/$giây^2$, 35 độ/giây tại 45 độ quanh trục x.

5. Tính toán các vector vận tốc góc và gia tốc góc trong các khung tọa độ vật thể và toàn cục nếu các góc Euler và đạo hàm của chúng là:

$$\begin{array}{lll} \varphi = 0.25 \text{ rad} & \dot{\varphi} = 2.5 \text{ rad/giây} & \ddot{\varphi} = 25 \text{ rad/giây}^2 \\ \theta = -0.25 \text{ rad} & \dot{\theta} = -4.5 \text{ rad/giây} & \ddot{\theta} = 35 \text{ rad/giây}^2 \\ \psi = 0.5 \text{ rad} & \dot{\psi} = 3 \text{ rad/giây} & \ddot{\psi} = 25 \text{ rad/giây}^2 \end{array}$$

CHƯƠNG 3. ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT

Mục tiêu cần đạt được của chương 3:

- Hiểu được động học chuyển động;
- Mô hình hóa được động lực học robot;
- Xây dựng được phương trình động lực học robot.

3.1. Giới thiệu

Động lực học là khoa học về chuyển động. Nó mô tả nguyên nhân và cách thức chuyển động xảy ra khi các lực và mômen tác dụng lên các vật thể có khối lượng. Chuyển động có thể được xem là sự tiến hóa của vị trí, hướng và các đạo hàm theo thời gian của chúng. Trong lĩnh vực robot, phương trình động lực học của các cánh tay robot được sử dụng để thiết lập các phương trình cơ bản cho điều khiển.

Các khâu và cánh tay trong hệ thống robot được mô hình hóa như các vật thể rắn. Do đó, các đặc tính động lực học của vật thể rắn giữ vị trí trung tâm trong động lực học robot. Vì các cánh tay robot có thể quay hoặc tịnh tiến so với nhau, các phương trình chuyển động tịnh tiến và quay phải được phát triển và mô tả trong các hệ tọa độ gắn với vật thể B_1, B_2, B_3, … hoặc trong hệ quy chiếu toàn cục G.

Về cơ bản, có hai vấn đề chính trong động lực học robot.

Vấn đề 1. Chúng ta muốn các khâu của robot di chuyển theo một cách cụ thể. Cần những lực và mô-men xoắn nào để đạt được chuyển động đó?

Vấn đề 1 được gọi là động lực học trực tiếp (động lực học thuận) và dễ giải hơn khi có các phương trình chuyển động vì cần vi phân các phương trình động học. Vấn đề này bao gồm tĩnh học của robot vì chuyển động có thể được xác định ở trạng thái nghỉ của robot. Trong trường hợp này, bài toán giảm thành việc tìm các lực sao cho không có chuyển động nào xảy ra khi các lực tác động. Tuy nhiên, có nhiều vấn đề có ý nghĩa liên quan đến chuyển động của robot hơn là ở trạng thái tĩnh. Ví dụ là tìm các lực cần thiết phải tác động lên robot sao cho cơ cấu chấp hành cuối của nó di chuyển trên một đường dẫn đã cho và với thời gian đã định từ cấu hình ban đầu đến cấu hình cuối cùng.

Vấn đề 2. Các lực và mô-men tác dụng lên robot đã biết. Robot sẽ di chuyển như thế nào?

Vấn đề thứ hai được gọi là động lực học ngược và khó giải hơn vì nó cần tích hợp các phương trình chuyển động. Vấn đề 2 về cơ bản là dự đoán vì chúng ta muốn tìm chuyển động của robot cho thời gian chưa biết trước, khi cấu hình ban đầu của mỗi khâu đã biết.

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kỹ thuật để suy ra các phương trình chuyển động cho một robot.

3.2. Động lực học chuyển động

Mối quan hệ giữa động học và nguyên nhân thay đổi trong động học được gọi là phương trình chuyển động. Việc suy ra phương trình chuyển động và biểu diễn giải pháp của chúng được gọi là động lực học. Chúng ta đánh giá các yếu tố của các phương trình chuyển động và phương pháp giải.

3.2.1. Lực và moment

Từ quan điểm Newton, các lực tác động lên một vật thể rắn được chia thành nội lực và ngoại lực. Nội lực tác động giữa các hạt của vật thể, và ngoại lực tác động từ bên ngoài vật thể. Một ngoại lực có thể là lực tiếp xúc, chẳng hạn như lực tác động tại khớp của robot, hoặc lực trọng trường, chẳng hạn như lực hấp dẫn trên các khớp của robot. Các ngoại lực và moment ngoại gọi là tải, và tập hợp các lực và moment tác động lên một vật thể rắn được gọi là một hệ thống lực. Lực kết quả hoặc tổng lực F là tổng của tất cả các ngoại lực tác động lên một vật thể, và moment kết quả hoặc tổng moment M là tổng của tất cả các moment của các ngoại lực quanh một gốc.

$$\begin{aligned} F &= \sum_i F_i \\ M &= \sum_i M_i \end{aligned} \tag{3-1}$$

Xem xét một lực F tác động tại một điểm P được xác định bởi vector vị trí r_P. Mô-men của lực xoay quanh một đường hướng l đi qua gốc tọa độ là

$$M_l = l\hat{u} \cdot (r_P \times F) \tag{3-2}$$

Trong đó $\hat{u}$ là một vector đơn vị chỉ ra hướng của l. Mô men của một lực cũng có thể được gọi là *moment* hoặc *torque*.

Moment của một lực F, tác động tại một điểm P, xoay quanh một điểm Q tại r_Q là

$$M_Q = (r_P - r_Q) \times F \tag{3-3}$$

Và do đó, moment của F về gốc tọa độ là

$$M = r_P \times F. \tag{3-4}$$

Ảnh hưởng của một hệ thống lực, tác động lên một vật thể rắn, tương đương với ảnh hưởng của lực kết quả và moment kết quả của hệ thống lực đó. Một hệ thống lực bất kỳ tương đương nếu lực tổng và moment tổng của chúng bằng nhau. Có thể xảy ra trường hợp lực tổng của một hệ thống lực là không. Trong trường hợp này, moment tổng của hệ thống lực không phụ thuộc vào gốc tọa độ. Moment tổng như vậy được gọi là *moment xoắn*.

Khi một hệ thống lực được giảm xuống thành một lực kết quả F_P và mô men kết quả M_P liên quan đến một điểm tham chiếu P, chúng ta có thể thay đổi điểm tham chiếu thành một điểm khác Q và tìm các lực kết quả mới như sau:

$$\begin{aligned} F_Q &= F_P \\ M_Q &= M_P + (r_P - r_Q) \times F_P = M_P + {}_Q r_P \times F_P. \end{aligned} \tag{3-5}$$

Động lượng của một vật thể rắn là một vector có tỉ lệ với tổng khối lượng của vật thể nhân với vận tốc dịch chuyển của trọng tâm khối lượng của vật thể.

$$p = mv \tag{3-6}$$

Động lượng cũng được gọi là động lượng tuyến tính hoặc động lượng dịch chuyển. Xem xét một vật thể rắn có động lượng p. Động lượng góc, L, về một đường chỉ hướng l đi qua gốc là:

$$L_l = l\hat{u} \cdot (r_C \times p) \tag{3-7}$$

Trong đó $\hat{u}$ là một vector đơn vị chỉ ra hướng của đường thẳng, r_C là vector vị trí của trọng tâm (C), và $L = r_C \times p$ là định mức động lượng về gốc. Moment động lượng cũng được gọi là moment góc để làm rõ từ momentum tuyến tính.

Một vector bị chặn là một vector cố định tại một điểm trong không gian. Một vector trượt hoặc vector đường là một vector tự do trượt trên đường thẳng của nó. Một vector tự do có thể di chuyển đến bất kỳ điểm nào miễn là nó giữ nguyên hướng của nó. Lực là một vector trượt và moment xoắn là một vector tự do. Tuy nhiên, moment của một lực phụ thuộc vào khoảng cách giữa gốc của hệ tọa độ và đường tác động.

Ứng dụng của hệ thống lực được nhấn mạnh bởi định luật thứ hai và thứ ba của Newton về chuyển động. Định luật thứ hai về chuyển động, cũng được gọi là phương trình chuyển động của Newton, cụ thể là tỉ lệ biến đổi tổng động lượng tuyến tính so với lực tác dụng toàn cục.

$${}^{G}F = \frac{{}^{G}d}{dt}\,{}^{G}p = \frac{{}^{G}d}{dt}(m\,{}^{G}v) \tag{3-8}$$

Định luật thứ ba của chuyển động nói rằng các lực tác động và phản lực giữa hai vật thể là bằng nhau và trái ngược nhau.

Định luật thứ hai của chuyển động có thể được mở rộng bao gồm các chuyển động quay. Do đó, định luật thứ hai của chuyển động cũng nói rằng tốc độ thay đổi toàn cục của moment góc là tỷ lệ so với moment tác dụng toàn cục.

$${}^{G}M = \frac{{}^{G}d}{dt}\,{}^{G}L \tag{3-9}$$

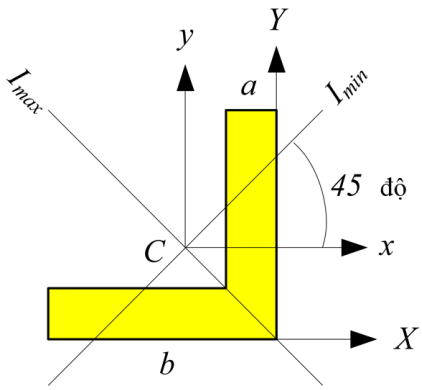
Ví dụ 3-1: Vị trí của trọng tâm.

Vị trí của trọng tâm của một vật thể rắn trong một hệ tọa độ được xác định bằng $\boldsymbol{r}_C$ và thường được đo trong hệ tọa độ của vật thể.

$$\begin{aligned} {}^{B}\boldsymbol{r}_C &= \frac{1}{m}\int_B \boldsymbol{r}\,dm \\ \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\int_B x\,dm \\ \frac{1}{m}\int_B y\,dm \\ \frac{1}{m}\int_B z\,dm \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-10}$$

Áp dụng phương trình tích phân trọng tâm trên vật thể rắn hình L đối xứng với $\rho = 1$ như được thể hiện trong Hình 3-1 sẽ cung cấp điểm C của phần đó. Vị trí x của C là

$$x_C = \frac{1}{m}\int_B x dm = \frac{1}{A}\int_B x dA = -\frac{b^2 + ab - a^2}{4ab + 2a^2} \tag{3-11}$$



Hình 3-1 Khung tọa độ chính cho mặt cắt ngang hình chữ L đối xứng [1].

và do đối xứng nên ta có:

$$y_C = -x_C = \frac{b^2 + ab - a^2}{4ab + 2a^2}. \tag{3-12}$$

Ví dụ 3-2: Hệ thống lực tương đương với một trục vít.

Định lý Poinsot phát biểu rằng: Mọi hệ thống lực đều tương đương với một lực duy nhất, cộng với một moment song song với lực đó. Đặt F và M là lực kết quả và moment của hệ thống lực. Chúng ta phân tách moment thành các thành phần song song và vuông góc, $M_{\parallel}$ và $M_{\perp}$ với trục lực. Lực F và moment vuông góc $M_{\perp}$ có thể được thay thế bằng một lực duy nhất F' song song với F. Do đó, hệ thống lực được giảm xuống thành một lực F' và một moment $M_{\parallel}$ song song với nhau. Một lực và một moment xoay quanh trục lực được gọi là một trục vít.

Định lý Poinsot tương tự như định lý Chasles, phát biểu rằng mọi chuyển động của vật thể rắn đều tương đương với một vít, gồm một chuyển động tịnh tiến và một chuyển động quay xoay quanh trục của chuyển động tịnh tiến.

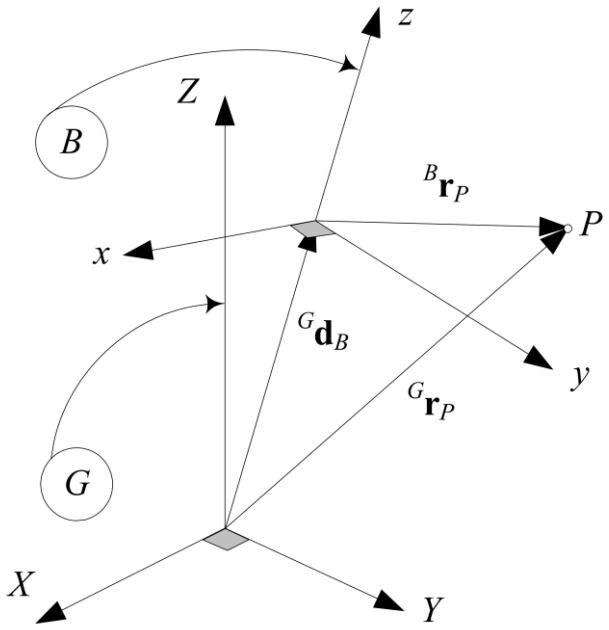
Ví dụ 3-3: Chuyển động của một điểm di chuyển trong khung tọa độ vật thể di động..

Vận tốc và gia tốc của một điểm di chuyển P như được hiển thị trong Hình 3-2 được tìm thấy trong Ví dụ 2-139.

$$\begin{aligned}
{}^G\boldsymbol{v}_P &= {}^G\dot{\boldsymbol{d}}_B + {}^G R_B({}^B\boldsymbol{v}_P + {}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P) \\
{}^G\boldsymbol{a}_P &= {}^G\ddot{\boldsymbol{d}}_B + {}^G R_B({}^B\boldsymbol{a}_P + 2\,{}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_P + {}^B_G\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P) \\
&+ {}^G R_B\left({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P)\right)
\end{aligned} \tag{3-13}$$

Công thức chuyển động cho khối lượng điểm P là

$$\begin{aligned}
{}^G\boldsymbol{F} &= m\,{}^G\boldsymbol{a}_P \\
&= m\left({}^G\ddot{\boldsymbol{d}}_B + {}^G R_B({}^B\boldsymbol{a}_P + 2\,{}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_P + {}^B_G\dot{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P)\right) \\
&\quad + m\,{}^G R_B\left({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P)\right).
\end{aligned} \tag{3-14}$$



Hình 3-2 Một vật thể rắn có một hệ tọa độ B(oxyz) đang di chuyển tự do trong một hệ tọa độ toàn cục G (OXYZ).

Ví dụ 3-4: Phương trình Newton trong một hệ tọa độ xoay.

Xem xét một vật thể rắn hình cầu (như Trái Đất) có một điểm cố định đang quay với một vận tốc góc không đổi. Phương trình chuyển động cho một điểm *P* di chuyển trên vật thể rắn được xác định bằng cách đặt ${}^G\ddot{\mathbf{d}}_B = {}^B_G\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = 0$ trong phương trình chuyển động của một điểm di chuyển trong một khung tọa độ vật thể di chuyển (3-14).

$$\begin{aligned} {}^B\boldsymbol{F} &= m^B\boldsymbol{a}_P + m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P) + 2m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\dot{\boldsymbol{r}}_P \\ &\neq m^B\boldsymbol{a}_P \end{aligned} \tag{3-15}$$

Cho thấy phương trình chuyển động của Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ không đúng trong một khung xoay.

Ví dụ 3-5: Lực Coriolis.

Phương trình chuyển động của một điểm di chuyển trên bề mặt Trái Đất là:

$${}^B\boldsymbol{F} = m^B\boldsymbol{a}_P + m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P) + 2m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_P \tag{3-16}$$

có thể được sắp xếp lại thành

$${}^B\boldsymbol{F} - m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P) - 2m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_P = m^B\boldsymbol{a}_P. \tag{3-17}$$

Phương trình (3-17) là phương trình chuyển động của một người quan sát trong hệ tọa độ quay, trong trường hợp này là một người quan sát trên Trái Đất. Vế trái của phương trình này được gọi là lực hiệu lực.

$$\boldsymbol{F}_{eff} = {}^B\boldsymbol{F} - m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{r}_P) - 2m^B_G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_P \tag{3-18}$$

Vì phân tử đang di chuyển dưới tác động của lực này.

Cụm thứ hai là âm của lực ly tâm và chỉ ra bên ngoài. Giá trị lớn nhất của lực này trên Trái đất là ở xích đạo.

$$r\omega^2 = 6378.388 \times 10^3 \times \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\frac{366.25}{365.25}\right)^2 = 3.3917 \times 10^{-2}\, m/s^2 \quad (3\text{-}19)$$

Đó là khoảng 0.3% của gia tốc trọng trường. Nếu chúng ta thêm biến đổi của gia tốc trọng trường do sự thay đổi bán kính từ $R = 6.356.912\, m$ ở cực Bắc đến $R = 6.378.388\, m$ ở xích đạo, thì sự biến đổi của gia tốc trọng trường trở thành 0.53%. Vì vậy, nói chung, một vận động viên như một vận động viên nhảy sào tại cực Bắc có thể thể hiện một kỷ lục tốt hơn trong một cuộc thi được tổ chức trên xích đạo.

Cụm thứ ba được gọi là hiệu ứng Coriolis, F_C, có hướng vuông góc so với cả ω và ${}^B\mathbf{v}_P$. Đối với một khối lượng m di chuyển trên bán cầu bắc ở vĩ độ θ hướng về xích đạo, chúng ta cần cung cấp một lực về phía đông bên ngoài bằng với hiệu ứng Coriolis để đẩy khối lượng, giữ cho hướng của nó so với mặt đất.

$$F_C = 2m\boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_m = 1.4584 \times 10^{-4}\, {}^B\boldsymbol{p}_m cos\,\theta kgm/s^2 \quad (3\text{-}20)$$

Hiệu ứng Coriolis là lý do khiến phía tây của đường sắt, đường bộ và sông bị mòn. Sự thiếu lực Coriolis là nguyên nhân khiến hướng của gió, vật thể ném và vật rơi được chuyển hướng về phía tây.

Ví dụ 3-6: Công, lực, và động năng trong chuyển động một chiều..

Một khối có khối lượng $m = 2\, kg$ và động năng ban đầu $K = 12\, J$. Khối này đang chịu tác động của một lực hằng định $\boldsymbol{F} = F\hat{I} = 4\hat{I}$ và di chuyển từ vị trí $X(0) = 1$ đến vị trí $X(t_f) =$ 22 m vào thời điểm kết thúc t_f. Công của lực trong quá trình này là

$$W = \int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t_f)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^{22} 4dX = 84Nm = 84\,J \quad (3\text{-}21)$$

Động năng tại thời điểm kết thúc là

$$K(t_f) = W + K(0) = 96\,J \quad (3\text{-}22)$$

điều này chỉ ra rằng tốc độ cuối cùng của khối là:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2K(t_f)}{m}} = \sqrt{96}\, m/s \quad (3\text{-}23)$$

Ví dụ 3-7: Lực biến thiên theo thời gian.

Khi lực tác dụng biến đổi theo thời gian,

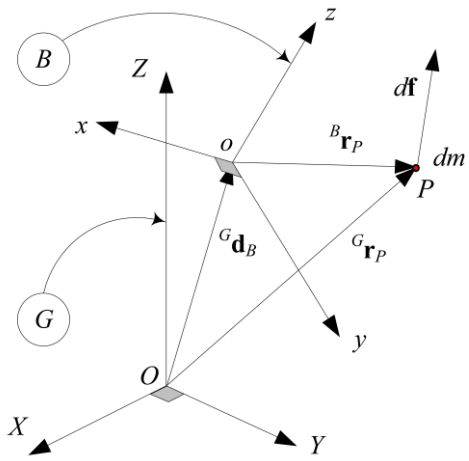
$$\boldsymbol{F}(t) = m\ddot{\boldsymbol{r}} \quad (3\text{-}24)$$

Khi đó có một giải pháp tổng quát cho phương trình chuyển động vì đặc tính và loại chuyển động khác nhau tùy thuộc vào $\boldsymbol{F}(t)$ khác nhau.

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \dot{r}(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t)dt \\ r(t) &= r(t_0) + \dot{r}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} F(t)dtdt \end{aligned} \tag{3-25}$$

3.2.2. Động năng dịch chuyển của vật thể rắn

Hình 3-3 mô tả một vật thể di chuyển B trong một khung tọa độ toàn cục G. Giả sử rằng khung tọa độ vật thể được gắn ở trọng tâm C của vật thể. Điểm P chỉ ra một quả cầu vô hạn cực nhỏ của vật thể có khối lượng rất nhỏ là dm. Khối lượng điểm dm bị tác động bởi một lực vô hạn $d\mathbf{f}$ và có vận tốc toàn cục ${}^{G}\boldsymbol{v}_P$.



Hình 3-3 Một khối điểm của cơ thể đang di chuyển với vận tốc G v và bị tác động bởi lực df.

Theo định luật Newton về chuyển động, chúng ta có:

$$d\boldsymbol{f} = {}^{G}\boldsymbol{a}_P dm \tag{3-26}$$

Tuy nhiên, phương trình chuyển động cho toàn bộ vật thể trong hệ tọa độ toàn cục là

$${}^{G}\boldsymbol{F} = m{}^{G}\boldsymbol{a}_B \tag{3-27}$$

mà có thể được biểu diễn trong hệ tọa độ vật thể như

$${}^{B}\boldsymbol{F} = m{}^{B}_{G}\boldsymbol{a}_B + m\,{}^{B}_{G}\boldsymbol{\omega}_B \times {}^{B}\boldsymbol{v}_B. \tag{3-28}$$

Trong những phương trình này, ${}^{G}\mathbf{a}_B$ là vector gia tốc của vật thể C trong hệ toạ độ toàn cục, m là khối lượng tổng của vật thể, và $\boldsymbol{F}$ là kết quả của ngoại lực tác động lên vật thể tại C.

3.2.3. Động năng quay của vật thể rắn

Phương trình chuyển động quay của vật thể rắn là phương trình Euler.

$$\begin{aligned} {}^{B}M &= \frac{{}^{G}}{dt}{}^{B}L = {}^{B}\dot{L} + {}^{B}_{G}\omega_B \times {}^{B}L \\ &= {}^{B}I\,{}^{B}_{G}\dot{\omega}_B + {}^{B}_{G}\omega_B \times ({}^{B}I\,{}^{B}_{G}\omega_B) \end{aligned} \tag{3-29}$$

Trong đó, L là moment góc.

$${}^{B}L = {}^{B}I\,{}^{B}_{G}\omega_B \tag{3-30}$$

Và I là moment khối lượng hoặc moment quán tính của vật thể rắn.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{3-31}$$

Những phần tử của I chỉ là các hàm của phân phối khối lượng của vật thể rắn và có thể được xác định bởi

$$I_{ij} = \int_B \left(r_i^2 \delta_{mn} - x_{im} x_{jn}\right) dm \,,\; i,j = 1,2,3 \tag{3-32}$$

Trong đó δ_{ij} là delta Kronecker.

Dạng mở rộng của phương trình Euler là:

$$\begin{aligned} M_x = \; & I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z - \left(I_{yy} - I_{zz}\right)\omega_y\omega_z \\ & -I_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right) - \omega_x\left(\omega_z I_{xy} - \omega_y I_{xz}\right) \end{aligned} \tag{3-33}$$

$$\begin{aligned} M_y = \; & I_{yx}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x \\ & -I_{xz}(\omega_x^2 - \omega_z^2) - \omega_y\left(\omega_x I_{yz} - \omega_z I_{xy}\right) \end{aligned} \tag{3-34}$$

$$\begin{aligned} M_z = \; & I_{zx}\dot{\omega}_x + I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z - \left(I_{xx} - I_{yy}\right)\omega_x\omega_y \\ & -I_{xy}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) - \omega_z\left(\omega_y I_{xz} - \omega_x I_{yz}\right). \end{aligned} \tag{3-35}$$

mà có thể được rút gọn thành

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_2)\omega_2\omega_3 \\ M_2 &= I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ M_3 &= I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned} \tag{3-36}$$

Trong một hệ tọa độ Descartes đặc biệt gọi là hệ tọa độ chính. Hệ tọa độ chính được ký hiệu bằng các số 123 để chỉ ra các trục chính thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Các tham số $I_{ij}, i \neq j$ là không trong hệ tọa độ chính. Vật thể và hệ tọa độ chính được giả định nằm tại C của vật thể. Động năng của một vật thể rắn xoay là

$$\begin{aligned} K \; & = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right) - I_{xy}\omega_x\omega_y - I_{yz}\omega_y\omega_z - I_{zx}\omega_z\omega_x \\ & = \frac{1}{2}\omega \cdot \boldsymbol{L} = \frac{1}{2}\omega^T I \omega \end{aligned} \tag{3-37}$$

trong hệ tọa độ chính giảm xuống thành

$$K = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2). \tag{3-38}$$

Ví dụ 3-8: Chuyển động quay ổn định của một vật thể rắn quay tự do.

Công thức Newton-Euler cho phương trình chuyển động của một vật thể rắn là:

$$\begin{aligned} {}^G F \; & = m\,{}^G\dot{v} \\ {}^B M \; & = I\,{}^B_G\dot{\omega}_B + {}^B_G\omega_B \times {}^B L. \end{aligned} \tag{3-39}$$

Xem xét một tình huống trong đó lực tác dụng kết quả và moment trên vật thể đều bằng không.

$$\begin{aligned} F &= 0 \\ M &= 0 \end{aligned} \tag{3-40}$$

Dựa trên phương trình Newton, vận tốc của trọng tâm sẽ là hằng số trong hệ tọa độ toàn cục. Tuy nhiên, phương trình Euler giảm xuống thành.

$$\dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2\omega_3 \tag{3-41}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_{22}}\omega_3\omega_1 \tag{3-42}$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2 \tag{3-43}$$

Chứng minh rằng tốc độ góc có thể là hằng số nếu

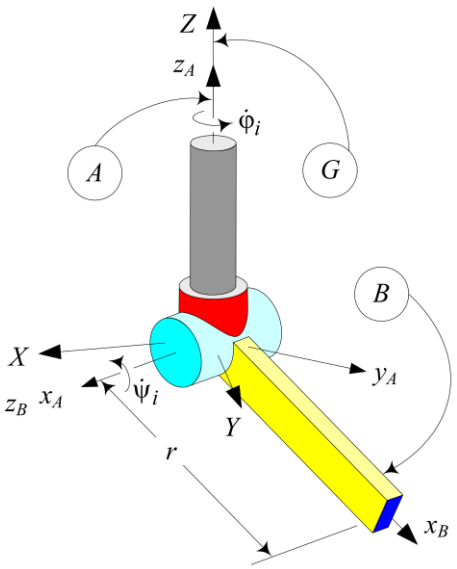
$$I_1 = I_2 = I_3 \tag{3-44}$$

Nếu hai moment quán tính chính, gọi là I_1 và I_2, bằng không và vận tốc góc thứ ba, trong trường hợp này là ω_3, ban đầu là không, hoặc nếu vector vận tốc góc ban đầu song song với một trục chính.

Ví dụ 3-9: Động lượng góc của một tay máy hai khâu.

Một tay máy hai khâu được hiển thị trong Hình 3-4. Khâu A quay với vận tốc góc $\dot{\varphi}$ quanh trục z của hệ tọa độ cục bộ của nó. Khâu B được gắn vào khâu A và có vận tốc góc $\dot{\psi}$ so với A quanh trục x_A. Chúng ta giả sử rằng A và G trùng nhau ở $\varphi = 0$, do đó, ma trận xoay giữa A và G là

$${}^{G}R_A = \begin{bmatrix} cos\varphi(t) & -sin\varphi(t) & 0 \\ sin\varphi(t) & cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3-45}$$



Hình 3-4 Tay máy hai khâu.

Khung tọa độ B có liên quan đến khung tọa độ A thông qua các góc Euler $\varphi = 90$ độ, $\theta = 90$ độ, và $\psi = \psi$, do đó,

$$
{}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} c\pi c\psi - c\pi s\pi s\psi & -c\pi s\psi - c\pi c\psi s\pi & s\pi s\pi \\ c\psi s\pi + c\pi c\pi s\psi & -s\pi s\psi + c\pi c\pi c\psi & -c\pi s\pi \\ s\pi s\psi & s\pi c\psi & c\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -cos\psi & sin\psi & 0 \\ sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3-46}
$$

và do đó,

$$
\begin{aligned} {}^{G}R_{B} &= {}^{G}R_{A}\,{}^{A}R_{B} \\ &= \begin{bmatrix} -cos\varphi cos\psi - sin\varphi sin\psi & cos\varphi sin\psi - cos\psi sin\varphi & 0 \\ cos\varphi sin\psi - cos\psi sin\varphi & cos\varphi cos\psi + sin\varphi sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3-47}
$$

Vận tốc góc của A trong G, và B trong A là

$$
\begin{aligned} {}_{G}\omega_{A} &= \dot{\varphi}\hat{K} \\ {}_{A}\omega_{B} &= \dot{\psi}\hat{\imath}_{A}. \end{aligned} \tag{3-48}
$$

Ma trận mô men quán tính cho cánh tay A và B có thể được xác định như sau

$$
{}^{A}I_{A} = \begin{bmatrix} I_{A1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{A2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{A3} \end{bmatrix} \tag{3-49}
$$

$$
{}^{B}I_{B} = \begin{bmatrix} I_{B1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{B3} \end{bmatrix}. \tag{3-50}
$$

Những moment quán tính này phải được chuyển đổi sang hệ toạ độ toàn cục.

$$
{}^{G}I_{A} = {}^{G}R_{B}\,{}^{A}I_{A}\,{}^{G}R_{A}^{T} \tag{3-51}
$$

$$
{}^{G}I_{B} = {}^{G}R_{B}\,{}^{B}I_{B}\,{}^{G}R_{B}^{T} \tag{3-52}
$$

Tổng moment góc của tay máy là

$$
{}^{G}L = {}^{G}L_{A} + {}^{G}L_{B} \tag{3-53}
$$

trong đó,

$$
{}^{G}L_{A} = {}^{G}I_{AG}\omega_{A} \tag{3-54}
$$

$$
{}^{G}L_{B} = {}^{G}I_{B}\omega_{B} = {}^{G}I_{B}\left({}^{G}_{A}\omega_{B} + {}_{G}\omega_{A}\right). \tag{3-55}
$$

Ví dụ 3-10: Cấu trúc của Poinsot

Xem xét một vật thể rắn có thể quay tự do với một khung tọa độ chính gắn kèm. Khi $M = 0$, một chuyển động dưới tác động của động lượng góc và động năng không đổi.

$$
L = I\omega = {}^{\text{const}} \tag{3-56}
$$

$$K = \frac{1}{2}\omega^T I\omega = \text{const} \tag{3-57}$$

Vì độ dài của moment góc L là hằng số, phương trình

$$\begin{aligned} L^2 &= L \cdot L = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \\ &= I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \end{aligned} \tag{3-58}$$

Một hình elip trong hệ tọa độ $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, được gọi là hình elip động lượng. Đỉnh của tất cả các vector vận tốc góc có thể phải nằm trên bề mặt của hình elip động lượng. Động năng cũng xác định một hình elip năng lượng trong cùng hệ tọa độ sao cho đỉnh của các vector vận tốc góc cũng phải nằm trên bề mặt của nó.

$$K = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{3-59}$$

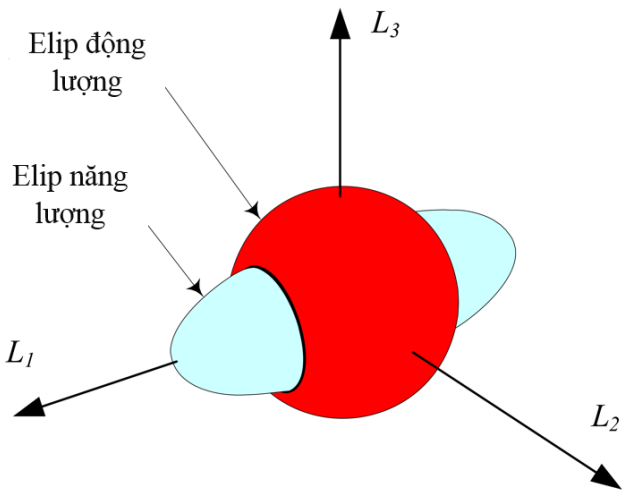
nói một cách khác, động lực học của chuyển động không moment của một vật thể rắn đòi hỏi rằng vận tốc góc tương ứng $\omega(t)$ phải thỏa mãn cả hai Phương trình (3-58) và (3-59) và do đó nằm trên giao điểm của các hình elip động lượng và năng lượng.

Để có một cách hiển thị tốt hơn, chúng ta có thể định nghĩa các elipsoit trong hệ tọa độ (L_x, L_y, L_z) như sau:

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 \tag{3-60}$$

$$\frac{L_x^2}{2I_1K} + \frac{L_y^2}{2I_2K} + \frac{L_z^2}{2I_3K} = 1. \tag{3-61}$$

Phương trình (3-60) là một hình cầu và Phương trình (3-61) xác định một elip với $\sqrt{2I_iK}$ là các bán trục. Để có một chuyển động có ý nghĩa, hai hình này phải giao nhau. Phần giao nhau có thể tạo thành một quỹ đạo, như được hiển thị trong Hình 3-5



Hình 3-5 Giao điểm của các hình elip động lượng và năng lượng [1].

Ta có thể suy luận rằng đối với một giá trị nhất định của moment góc, tồn tại các giá trị giới hạn tối đa và tối thiểu cho động năng có thể chấp nhận được. Giả sử

$$I_1 > I_3 > I_3 \tag{3-62}$$

Giới hạn của động năng có thể là

$$K_{min} = \frac{L^2}{2I_1} \tag{3-63}$$

$$K_{max} = \frac{L^2}{2I_3} \tag{3-64}$$

và các chuyển động tương ứng là quay quanh các trục I_1 và I_3 tương ứng.

Ví dụ 3-11: Phương pháp thay thế của phương trình Euler về chuyển động.

Moment của lực nhỏ df là dm.

$$\begin{aligned} dm &= {}^{G}r_{dm} \times df \\ &= {}^{G}r_{dm} \times {}^{G}\dot{v}_{dm} dm. \end{aligned} \tag{3-65}$$

Động lượng góc quán tính dl của dm bằng

$$dl = {}^{G}r_{dm} \times {}^{G}v_{dm} dm \tag{3-66}$$

và theo (3-9), chúng ta có

$$dm = \frac{{}^{G}d}{dt} dl \tag{3-67}$$

$${}^{G}r_{dm} \times df = \frac{{}^{G}d}{dt}({}^{G}r_{dm} \times {}^{G}v_{dm} dm). \tag{3-68}$$

Tích phân trên vật thể là

$$\begin{aligned} \int_B {}^{G}r_{dm} \times df &= \int_B \frac{{}^{G}d}{dt}({}^{G}r_{dm} \times {}^{G}v_{dm} dm) \\ &= \frac{{}^{G}d}{dt} \int_B ({}^{G}r_{dm} \times {}^{G}v_{dm} dm). \end{aligned} \tag{3-69}$$

Tuy nhiên, sử dụng

$${}^{G}r_{dm} = {}^{G}d_B + {}^{G}R_B \, {}^{B}r_{dm} \tag{3-70}$$

Trong đó, ${}^{G}\mathrm{d}_B$ là vector vị trí toàn cục của khung tọa độ vật thể trung tâm, có thể đơn giản hóa phía bên trái của phần tích phân thành

$$\begin{aligned} \int_B {}^{G}r_{dm} \times df &= \int_B ({}^{G}d_B + {}^{G}R_B \, {}^{B}r_{dm}) \times df \\ &= \int_B {}^{G}d_B \times df + \int_B {}_{B}r_{dm} \times df \\ &= {}^{G}d_B \times {}^{G}F + {}^{G}M_C \end{aligned} \tag{3-71}$$

Trong đó, M_C là moment ngoài kết quả xoay quanh trọng tâm vật thể C. Phía bên phải của Phương trình (3-12) là

$$
\begin{aligned}
& \frac{{}^{G}d}{dt}\int_{B}({}^{G}r_{dm}\times{}^{G}v_{dm}dm) \\
= \; & \frac{G_d}{dt}\int_{B}\left(({}^{G}d_B+{}^{G}R_B\,{}^{B}r_{dm})\times{}^{G}v_{dm}dm\right) \\
= \; & \frac{{}^{G}}{dt}\int_{B}({}^{G}d_B\times{}^{G}v_{dm})dm+\frac{{}^{G}d}{dt}\int_{B}({}^{G}_{B}r_{dm}\times{}^{G}v_{dm})dm \qquad (3\text{-}72) \\
= \; & \frac{d}{dt}\left({}^{G}d_B\times\int_{B}{}^{G}v_{dm}dm\right)+\frac{d}{dt}L_C \\
= \; & {}^{G}\dot{d}_B\times\int_{B}{}^{G}v_{dm}dm+{}^{G}d_B\times\int_{B}{}^{G}\dot{v}_{dm}dm+\frac{d}{dt}L_C.
\end{aligned}
$$

Chúng ta sử dụng L_C để biểu diễn động lượng góc xoay quanh trọng tâm của vật thể. Vì khung tọa độ vật thể nằm ở trọng tâm, chúng ta có như sau:

$$\int_{B}{}^{G}r_{dm}dm=m{}^{G}d_B=m{}^{G}r_C \qquad (3\text{-}73)$$

$$\int_{B}{}^{G}v_{dm}dm=m{}^{G}\dot{d}_B=m{}^{G}v_C \qquad (3\text{-}74)$$

$$\int_{B}{}^{G}\dot{v}_{dm}dm=m{}^{G}\ddot{d}_B=m{}^{G}a_C \qquad (3\text{-}75)$$

và do đó,

$$\frac{{}^{G}d}{dt}\int_{B}({}^{G}r_{dm}\times{}^{G}v_{dm}dm)={}^{G}d_B\times{}^{G}F+\frac{{}^{G}d}{dt}{}^{G}L_C. \qquad (3\text{-}76)$$

Thay thế (3-71) và (3-76) vào (3-69) có phương trình Euler chuyển động trong hệ tọa độ toàn cục, chỉ ra rằng tổng của những moment ngoại tác dụng từ bên ngoài quanh C bằng đạo hàm toàn cục của moment góc quanh C.

$${}^{G}M_C=\frac{{}^{G}d}{dt}{}^{G}L_C \qquad (3\text{-}77)$$

Phương trình Euler trong hệ tọa độ vật thể có thể được tìm thấy bằng cách biến đổi (3-77).

$$
\begin{aligned}
{}^{B}M_C &= {}^{G}R_B^T\,{}^{G}M_C={}^{G}R_B^T\frac{{}^{G}}{dt}L_C=\frac{{}^{G}d}{dt}{}^{G}R_B^TL_C \\
&=\frac{{}^{G}d}{dt}{}^{B}L_C={}^{B}\dot{L}_C+{}^{B}_{G}\omega_B\times{}^{B}L_C
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}78)
$$

3.2.4. Ma trận mômen quán tính khối lượng

Trong việc phân tích chuyển động của các vật thể rắn, có hai loại tích phân phát sinh thuộc về hình học của vật thể. Loại đầu tiên xác định trọng tâm và phát sinh khi chuyển động thẳng của vật thể được xem xét. Loại thứ hai là moment quán tính xuất hiện khi chuyển động quay của vật thể được xem xét. Moment quán tính cũng được gọi là moment ly tâm hoặc moment lệch. Mỗi vật thể rắn đều có ma trận moment quán tính I, 3×3, được ký hiệu là

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3-79}$$

Các phần tử chéo $I_{ij}, i = j$ được gọi là moment quán tính cực.

$$\begin{aligned} I_{xx} = I_x &= \int_B (y^2 + z^2) dm \\ I_{yy} = I_y &= \int_B (z^2 + x^2) dm \\ I_{zz} = I_z &= \int_B (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \tag{3-80}$$

Và các phần tử ngoại đường chéo $I_{ij}, i \neq j$ được gọi là tích của quán tính.

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= -\int_B xy dm \\ I_{yz} = I_{zy} &= -\int_B yz dm \\ I_{zx} = I_{xz} &= -\int_B zx dm. \end{aligned} \tag{3-81}$$

Các phần tử của ma trận I cho một vật thể rắn, được tạo thành từ các khối lượng điểm rời rạc, được xác định trong Phương trình (3-32).

Các phần tử của ma trận moment động học I là các moment của quán tính xoay quanh một hệ tọa độ vật thể được gắn với C của vật thể. Do đó, I là một đại lượng phụ thuộc vào hệ tọa độ và phải được viết như ${}^{B}I$ để chỉ rõ hệ tọa độ mà nó được tính toán trong đó.

$$\begin{aligned} {}^{B}I &= \int_B \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm \\ &= \int_B (r^2 I - r r^T) dm = \int_B -\tilde{r}\tilde{r} dm \end{aligned} \tag{3-82}$$

Moment quán tính có thể được chuyển đổi từ hệ tọa độ B_1 sang một hệ tọa độ khác B_2, cả hai được đặt tại trọng tâm của vật thể, theo quy tắc của định lý trục quay.

$${}^{B_2}I = {}^{B_2}R_{B_1} \, {}^{B_1}I \, {}^{B_2}R_{B_1}^T. \tag{3-83}$$

Biến đổi của moment quán tính từ khung tọa độ trung tâm B_1 đặt tại ${}^{B_2}\mathbf{r}_C$ sang một khung tọa độ khác B_2, mà song song với B_1, theo quy tắc của định lý trục song song,

$${}^{B_2}I = {}^{B_1}I + m\bar{r}_C\tilde{r}_C^T. \tag{3-84}$$

Nếu hệ tọa độ cục bộ $Oxyz$ được đặt ở vị trí sao cho các tích quán tính biến mất, hệ tọa độ cục bộ đó được gọi là hệ tọa độ chính và các động moment quán tính kèm theo được gọi là moment quán tính chính. Các trục chính và moment quán tính chính có thể được tìm bằng cách giải phương trình sau cho I.

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{vmatrix} = 0 \tag{3-85}$$

$$det([I_{ij}] - I[\delta_{ij}]) = 0 \tag{3-86}$$

Vì Phương trình (3-86) là một phương trình bậc ba trong I, chúng ta thu được ba giá trị riêng.

$$I_1 = I_x \qquad I_2 = I_y \qquad I_3 = I_z \tag{3-87}$$

Đây là những moment quán tính chính.

Chúng ta có thể sử dụng các vector vị trí đồng nhất và xác định một ma trận khối lượng quán tính tổng quát hơn, được gọi là ma trận giả quán tính.

$$\begin{aligned} {}^B\bar{I} &= \int_B rr^T dm \\ &= \begin{bmatrix} \int_B x^2 dm & \int_B xy dm & \int_B xz dm & \int_B x dm \\ \int_B xy dm & \int_B y^2 dm & \int_B yz dm & \int_B y dm \\ \int_B xz dm & \int_B yz dm & \int_B z^2 dm & \int_B z dm \\ \int_B x dm & \int_B y dm & \int_B z dm & \int_B dm \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-88}$$

Ma trận giả quán tính này có thể được mở rộng để hiển thị rằng

$${}^B\bar{I} = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & mx_C \\ I_{yx} & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{yz} & my_C \\ I_{zx} & I_{zy} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & mz_C \\ mx_C & my_C & mz_C & m \end{bmatrix} \tag{3-89}$$

trong đó,

$${}^B r_C = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\int_B x dm \\ \frac{1}{m}\int_B y dm \\ \frac{1}{m}\int_B z dm \end{bmatrix} \tag{3-90}$$

là vị trí trọng tâm trong khung tọa độ vật thể. Vector này bằng không nếu khung tọa độ vật thể là trung tâm.

Ví dụ 3-12: Moment quán tính chính

Xem xét ma trận quán tính

$$I = \begin{bmatrix} 20 & -2 & 0 \\ -2 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \tag{3-91}$$

Chúng ta thiết lập định thức (3-86).

$$\begin{vmatrix} 20-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 30-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 40-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3-92}$$

điều này dẫn đến phương trình đặc trưng

$$(20-\lambda)(30-\lambda)(40-\lambda) - 4(40-\lambda) = 0. \tag{3-93}$$

Ba nghiệm của Phương trình (3-93) là

$$I_1 = 30.385,\ I_2 = 19.615,\ I_3 = 40 \tag{3-94}$$

Và do đó, ma trận moment quán tính chính là

$$I = \begin{bmatrix} 30.385 & 0 & 0 \\ 0 & 19.615 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}. \tag{3-95}$$

Ví dụ 3-13: Hệ tọa độ chính.

Xem xét ma trận quán tính

$$I = \begin{bmatrix} 20 & -2 & 0 \\ -2 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \tag{3-96}$$

Hướng của trục chính x_i được xác định bằng cách giải phương trình sau:

$$\begin{bmatrix} I_{xx}-I_i & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I_i & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha_i \\ cos\beta_i \\ cos\gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-97}$$

Đối với các cosin hướng, cũng phải thỏa mãn

$$cos^2\alpha_i + cos^2\beta_i + cos^2\gamma_i = 1. \tag{3-98}$$

Đối với moment quán tính chính thứ nhất $I_1 = 30.385$, chúng ta có

$$\begin{bmatrix} 20-30.385 & -2 & 0 \\ -2 & 30-30.385 & 0 \\ 0 & 0 & 40-30.385 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha_1 \\ cos\beta_1 \\ cos\gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-99}$$

hoặc

$$\begin{aligned} -10.385cos\alpha_1 - 2cos\beta_1 + 0 &= 0 \\ -2cos\alpha_1 - 0.385cos\beta_1 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 9.615cos\gamma_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3-100}$$

và ta thu được kết quả như sau:

$$\alpha_1 = 79.1 \text{ độ } \beta_1 = 169.1 \text{ độ } \gamma_1 = 90.0 \text{ độ.} \tag{3-101}$$

Sử dụng $I_2 = 19.615$ cho trục chính thứ hai.

$$\begin{bmatrix} 20-19.62 & -2 & 0 \\ -2 & 30-19.62 & 0 \\ 0 & 0 & 40-19.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha_2 \\ cos\beta_2 \\ cos\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-102}$$

và ta thu được kết quả như sau:

$$\alpha_2 = 10.9 \text{ độ } \beta_2 = 79.1 \text{ độ } \gamma_2 = 90.0 \text{ độ.} \tag{3-103}$$

Trục chính thứ ba là cho $I_3 = 40$.

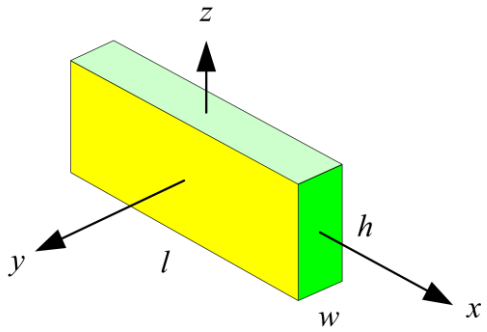
$$\begin{bmatrix} 20-40 & -2 & 0 \\ -2 & 30-40 & 0 \\ 0 & 0 & 40-40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha_3 \\ cos\beta_3 \\ cos\gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-104}$$

dẫn đến

$$\alpha_3 = 90.0 \text{ độ} \quad \beta_3 = 90.0 \text{ độ} \quad \gamma_3 = 0.0 \text{ độ.} \tag{3-105}$$

Ví dụ 3-14: Moment quán tính của một khâu chữ nhật cứng.

Xem xét một khối hình hộp đồng nhất có khối lượng m, chiều dài l, chiều rộng w và chiều cao h, như được hiển thị trong Hình 3-6.



Hình 3-6 Khâu chữ nhật đồng nhất.

Hệ tọa độ trung tâm cục bộ được gắn vào trọng tâm của khâu. Ma trận moment quán tính của khâu có thể được tìm bằng phương pháp tích phân. Chúng ta bắt đầu với việc tính toán I_{xx}.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_B (y^2+z^2)dm = \int_v (y^2+z^2)\rho dv = \frac{m}{lwh}\int_v (y^2+z^2)dv \\ &= \frac{m}{lwh}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-w/2}^{w/2}\int_{-l/2}^{l/2}(y^2+z^2)dxdydz \\ &= \frac{m}{12}(w^2+h^2) \end{aligned} \tag{3-106}$$

Có thể tính I_{yy} và I_{zz} một cách tương tự.

$$I_{yy} = \frac{m}{12}(h^2+l^2) \tag{3-107}$$

$$I_{zz} = \frac{m}{12}(l^2 + w^2) \tag{3-108}$$

Vì hệ tọa độ là trung tâm, các tích vô hướng phải bằng không. Để chứng minh điều này, chúng ta xem xét I_{xy}.

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\int_B xydm = \int_v xy\rho dv \\ &= \frac{m}{lwh}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-w/2}^{w/2}\int_{-l/2}^{l/2} xydxdydz = 0 \end{aligned} \tag{3-109}$$

Do đó, ma trận moment quán tính cho khối hình hộp cứng trong hệ tọa độ trung tâm của nó là

$$I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(w^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(h^2 + l^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l^2 + w^2) \end{bmatrix} \tag{3-110}$$

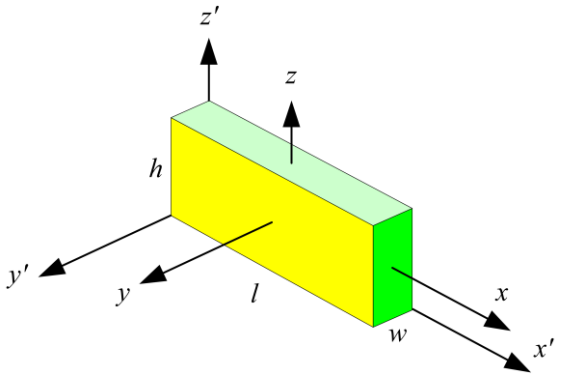
Ví dụ 3-15: Dịch chuyển tịnh tiến của ma trận quán tính.

Ma trận mô men quán tính của khâu cứng được hiển thị trong Hình 3-7, trong hệ toạ độ chính $B(oxyz)$ được cho trong Phương trình (3-110). Ma trận mô men quán tính trong hệ toạ độ không chính $B'(ox'y'z')$ có thể được xác định bằng cách áp dụng công thức biến đổi trục song song.

$${}^{B'}I = {}^{B}I + m\,{}^{B'}\tilde{r}_C\,{}^{B'}\tilde{r}_C^T \tag{3-111}$$

Vector vị trí trọng tâm là

$${}^{B'}r_C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} l \\ w \\ h \end{bmatrix} \tag{3-112}$$



Hình 3-7 Khối chữ nhật cứng trong các khung chính và không chính.

và do đó,

$${}^{B'}\tilde{r}_C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -h & w \\ h & 0 & -l \\ -w & l & 0 \end{bmatrix} \tag{3-113}$$

ta có

$$'I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}h^2m + \frac{1}{3}mw^2 & -\frac{1}{4}lmw & -\frac{1}{4}hlm \\ -\frac{1}{4}lmw & \frac{1}{3}h^2m + \frac{1}{3}l^2m & -\frac{1}{4}hmw \\ -\frac{1}{4}hlm & -\frac{1}{4}hmw & \frac{1}{3}l^2m + \frac{1}{3}mw^2 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}114)$$

3.2.5. Biểu thức Lagrange của phương trình Newton

Phương trình chuyển động của Newton có thể được chuyển đổi thành

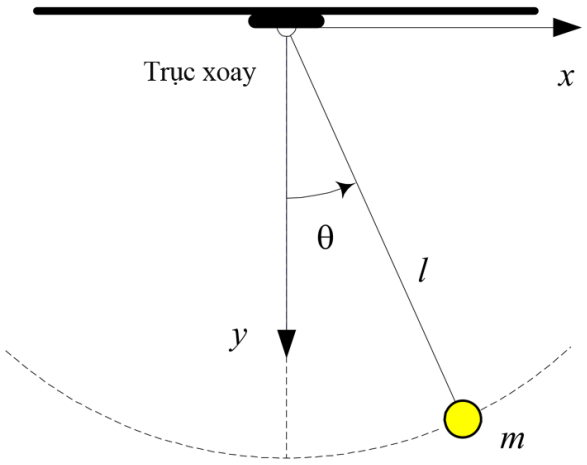
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_r} = F_r \qquad với\ r = 1,2,\cdots n \quad (3\text{-}115)$$

trong đó,

$$F_r = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + F_{iy}\frac{\partial g_i}{\partial q_2} + F_{iz}\frac{\partial h_i}{\partial q_n}\right) \quad (3\text{-}116)$$

Phương trình (3-115) được gọi là phương trình Lagrange của chuyển động, trong đó K là động năng của hệ thống n DOF, $q_r, r = 1,2,\cdots,n$ là các tọa độ tổng quát của hệ thống, $F = [F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{iz}]^T$ là ngoại lực tác động lên phần tử thứ i của hệ thống, và F_r là lực tổng quát liên quan đến q_r.

Ví dụ 3-16: Con lắc đơn.



Hình 3-8 Con lắc đơn [1].

Con lắc được hiển thị trong Hình 3-8. Sử dụng x và y để biểu diễn vị trí Descartes của m, và sử dụng $\theta = q$ làm tọa độ tổng quát, chúng ta có

$$\begin{aligned} x &= f(\theta) = l\sin\theta \\ y &= g(\theta) = l\cos\theta \\ K &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (3\text{-}117)$$

và do đó,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) = ml^2\ddot{\theta}. \tag{3-118}$$

Các thành phần ngoại lực, tác động lên m, là

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= mg \end{aligned} \tag{3-119}$$

và do đó,

$$F_\theta = F_x\frac{\partial f}{\partial \theta} + F_y\frac{\partial g}{\partial \theta} = -mglsin\theta. \tag{3-120}$$

Do đó, phương trình chuyển động cho con lắc là

$$ml^2\ddot{\theta} = -mglsin\theta. \tag{3-121}$$

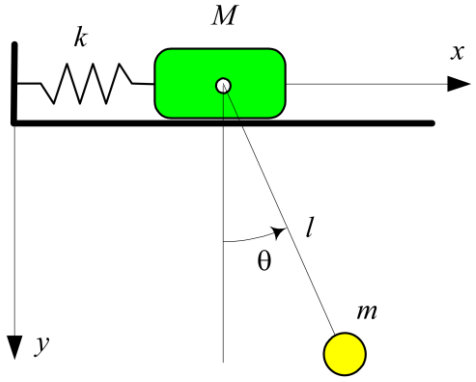
Ví dụ 3-17: Con lắc gắn với một khối dao động.

Hình 3-9 minh họa một khối rung có con lắc treo. Nếu được thiết kế đúng cách, con lắc có thể hoạt động như một bộ hấp thụ rung động. Mối quan hệ tọa độ là:

$$\begin{aligned} x_M &= f_M = x \\ y_M &= g_M = 0 \\ x_m &= f_m = x + lsin\theta \\ y_m &= g_m = lcos\theta \end{aligned} \tag{3-122}$$

Động năng trong các tọa độ tổng quát x và θ.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}cos\theta\right) \end{aligned} \tag{3-123}$$



Hình 3-9 Bộ hấp thụ rung động.

Vế trái của các phương trình Lagrange là

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial K}{\partial x} &= (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} &= ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta \end{aligned} \tag{3-124}$$

Ngoại lực tác dụng lên M và m là

$$\begin{aligned} F_{x_M} &= -kx \\ F_{y_M} &= 0 \\ F_{x_m} &= 0 \\ F_{y_m} &= mg. \end{aligned} \tag{3-125}$$

Do đó, các lực tổng quát được xác định là

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x_M}\frac{\partial f_M}{\partial x} + F_{y_M}\frac{\partial g_M}{\partial x} + F_{x_m}\frac{\partial f_m}{\partial x} + F_{y_m}\frac{\partial g_m}{\partial x} \\ &= -kx \\ F_\theta &= F_{x_M}\frac{\partial f_M}{\partial \theta} + F_{y_M}\frac{\partial g_M}{\partial \theta} + F_{x_m}\frac{\partial f_m}{\partial \theta} + F_{y_m}\frac{\partial g_m}{\partial \theta} \\ &= -mglsin\theta \end{aligned} \tag{3-126}$$

phương trình Lagrange về chuyển động là

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2 sin\theta &= -kx \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}cos\theta &= -mglsin\theta \end{aligned} \tag{3-127}$$

3.2.6. Cơ học Lagrange

Giả sử có một số lực $F = [F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{iz}]^T$, có một hàm V, được gọi là thế năng, sao cho lực đó có thể được suy ra từ V.

$$F = -\nabla V. \tag{3-128}$$

Lực như vậy được gọi là lực thế năng hoặc lực bảo toàn. Phương trình Lagrange của chuyển động có thể được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = Q_r \qquad r = 1,2,\cdots n \tag{3-129}$$

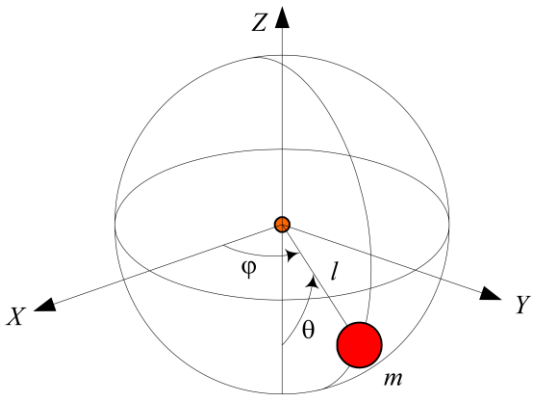
trong đó

$$\mathcal{L} = K - V \tag{3-130}$$

Đây là hàm Lagrange của hệ thống và Q_r là lực tổng quát không thế năng.

Ví dụ 3-18: Con lắc cầu.

So sánh với con lắc được sử dụng trong việc mô hình hóa nhiều vấn đề động học. Hình 3-10 minh họa một con lắc cầu có khối lượng m và chiều dài l. Các góc φ và θ có thể được sử dụng như các tọa độ mô tả của hệ thống.



Hình 3-10 Con lắc cầu.

Các tọa độ Descartes khối lượng dưới dạng một hàm của các tọa độ tổng quát là

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rcos\varphi sin\theta \\ rsin\theta sin\varphi \\ -rcos\theta \end{bmatrix} \tag{3-131}$$

Và do đó, động năng và thế năng của con lắc là

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) \\ V &= -mglcos\theta. \end{aligned} \tag{3-132}$$

Hàm thế năng động năng của hệ thống bằng

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) + mglcos\theta \tag{3-133}$$

dẫn đến các phương trình chuyển động sau:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta + \frac{g}{l}sin\theta &= 0 \\ \ddot{\varphi}sin^2\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}sin\theta cos\theta &= 0. \end{aligned} \tag{3-134}$$

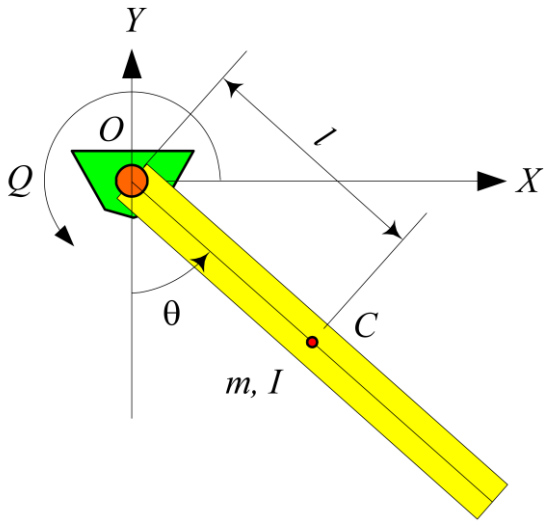
Ví dụ 3-19: Cánh tay robot có một khâu.

Cánh tay robot có một khâu được minh họa trong Hình 3-11. Giả sử rằng có ma sát nhớt trong khớp nơi một động cơ lý tưởng có mô-men xoắn Q để di chuyển cánh tay. Giả định rôto của một động cơ lý tưởng không có moment quán tính.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta + \frac{g}{l}sin\theta &= 0 \\ \ddot{\varphi}sin^2\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}sin\theta cos\theta &= 0. \end{aligned} \tag{3-135}$$

Động năng và thế năng của cánh tay robot là

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(I_C + ml^2)\dot{\theta}^2 \\ V &= -mgcos\theta \end{aligned} \tag{3-136}$$



Hình 3-11 Con lắc.

Trong đó, m là khối lượng và I là moment quán tính của con lắc quanh điểm O. Hàm Lagrange của cánh tay robot là

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + mgcos\theta \tag{3-137}$$

Và do đó, phương trình chuyển động của cánh tay robot là

$$M = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} + mglsin\theta. \tag{3-138}$$

Động lực tổng quát M gồm đóng góp của mô men xoắn động cơ Q và mô men ma sát nhớt $-\dot{\theta}$. Do đó, phương trình chuyển động của cánh tay robot là

$$Q = I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mglsin\theta. \tag{3-139}$$

Ví dụ 3-20: Động lực học của cánh tay robot phẳng 2R lý tưởng.

Một mô hình lý tưởng của một cánh tay robot phẳng 2R được minh họa trong Hình 3-12. Nó được gọi là lý tưởng vì chúng ta giả định rằng các khâu không có khối lượng và không có ma sát. Các khối lượng m_1 và m_2 là khối lượng của động cơ thứ hai để chạy khâu thứ hai và tải tại điểm cuối. Lấy góc tuyệt đối θ_1 và góc tương đối θ_2 làm tọa độ tổng quát để biểu diễn cấu hình của cánh tay robot.

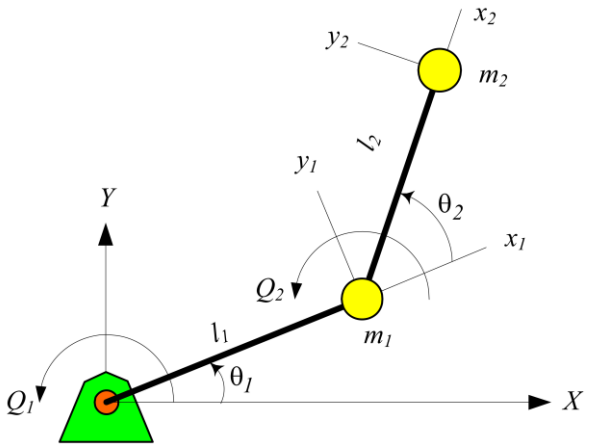
Vị trí toàn cục của m_1 và m_2 là

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 cos\theta_1 \\ l_1 sin\theta_1 \end{bmatrix} \tag{3-140}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{3-141}$$

Và do đó, vận tốc toàn cục của các khối lượng là

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 \\ l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \tag{3-142}$$



Hình 3-12 Mô hình lý tưởng của một cánh tay robot phẳng 2R.

Động năng của cánh tay robot này được tạo ra từ động năng của các khối và bằng:

$$\begin{aligned} K = \quad & K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) \\ = \quad & \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)cos\theta_2\right) \end{aligned} \tag{3-143}$$

Thế năng của cánh tay robot là:

$$\begin{aligned} V \quad & = V_1 + V_2 = m_1 g Y_1 + m_2 g Y_2 \\ & = m_1 g l_1 sin\theta_1 + m_2 g\left(l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \end{aligned} \tag{3-144}$$

Phương trình Lagrange được tạo ra từ Công thức (3-143) và (3-144).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \quad & K - V = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)cos\theta_2\right) \\ & - \left(m_1 g l_1 sin\theta_1 + m_2 g\left(l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2)\right)\right) \end{aligned} \tag{3-145}$$

các đạo hàm riêng cần thiết như sau:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)g l_1 cos\theta_1 - m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ & + m_2 l_1 l_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)cos\theta_2 \\ & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ & + m_2 l_1 l_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)cos\theta_2 \\ & - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)sin\theta_2 \\ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)sin\theta_2 - m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 cos\theta_2 \\ & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 cos\theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin\theta_2 \end{aligned} \tag{3-146}$$

Do đó, phương trình chuyển động cho cánh tay robot 2R là:

$$
\begin{aligned}
Q_1 = & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} \\
= & (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\
& + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) cos\theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) sin\theta_2 \\
& + (m_1 + m_2) g l_1 cos\theta_1 + m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\
Q_2 = & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} \\
= & m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 cos\theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin\theta_2 \\
& + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) sin\theta_2 + m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}
\tag{3-147}
$$

Những lực tổng quát Q_1 và Q_2 là những lực cần thiết để điều khiển các tọa độ tổng quát. Trong trường hợp này, Q_1 là mô men xoắn tại động cơ cơ sở và Q_2 là mô men xoắn của động cơ tại m_1.

Phương trình chuyển động có thể được sắp xếp lại để có dạng hệ thống hơn.

$$
\begin{aligned}
Q_1 = & \left((m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2 (l_2 + 2 l_1 cos\theta_2)\right) \ddot{\theta}_1 \\
& + m_2 l_2 (l_2 + l_1 cos\theta_2) \ddot{\theta}_2 \\
& - 2 m_2 l_1 l_2 sin\,\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\
& + (m_1 + m_2) g l_1 cos\theta_1 + m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\
Q_2 = & \; m_2 l_2 (l_2 + l_1 cos\theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\
& + m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2).
\end{aligned}
\tag{3-148}
$$

3.2.7. Bài tập

1. Xem xét một thanh thẳng và đồng đều như một khâu cứng của một tay máy. Khâu có khối lượng m. Chứng minh rằng động năng của thanh có thể được biểu diễn như sau:

$$K = \frac{1}{6} m(\mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_2 \cdot \mathrm{v}_2)$$

Trong đó v_1 và v_2 là các vector vận tốc của các điểm cuối của khâu.

2. Có ba phần tử $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg, tại

$$\mathrm{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{r}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{r}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vận tốc của các phần tử là

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tìm vị trí và vận tốc của hệ thống tại điểm C. Tính moment động lượng và động lượng góc của hệ thống. Tính động năng của hệ thống và xác định phần quay và phần dịch chuyển thẳng của động năng.

3. Chứng minh rằng phương trình chuyển động của Newton trong hệ tọa độ vật thể là

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

4. Một phần tử có khối lượng m đang di chuyển trên một đường tròn được cho bởi

$$^{G}\mathrm{r}_P = \cos\theta \hat{I} + \sin\theta \hat{J} + 4\hat{K}.$$

Tính toán công thực hiện bởi một lực $^{G}\mathrm{F}$ khi hạt di chuyển từ $\theta = 0$ đến $\theta = \pi/2$.

a. $^{G}\mathrm{F} = \frac{z^2-y^2}{(x+y)^2}\hat{I} + \frac{y^2-x^2}{(x+y)^2} \cdot \hat{J} + \frac{x^2-y^2}{(x+z)^2}\hat{K}$

b. $^{G}\mathrm{F} = \frac{z^2-y^2}{(x+y)^2}\hat{I} + \frac{2y}{x+y}\hat{J} + \frac{x^2-y^2}{(x+z)^2}\hat{K}$

5. Tìm các moment quán tính chính và hướng cho các ma trận quán tính sau đây:

a. $[I] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

b. $[I] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

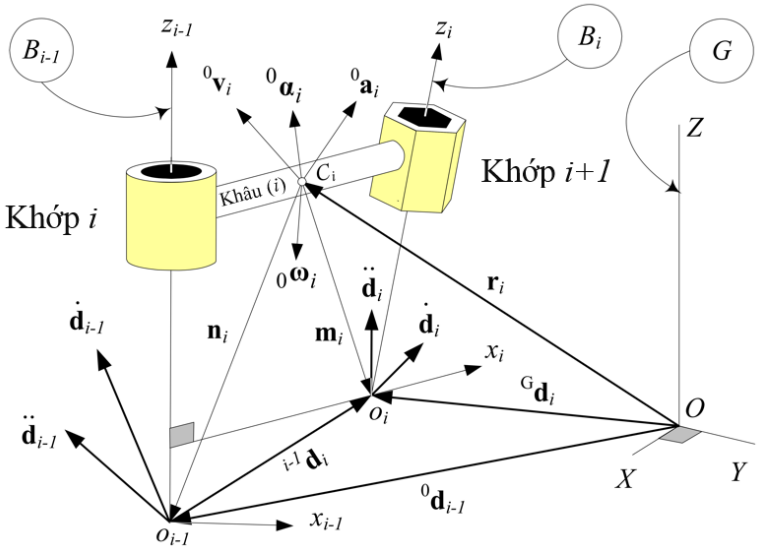
c. $[I] = \begin{bmatrix} 100 & 20\sqrt{3} & 0 \\ 20\sqrt{3} & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

3.3. Động lực học robot

Chúng ta tìm phương trình động lực học của robot bằng hai phương pháp: Newton-Euler và Lagrange. Phương pháp Newton-Euler cơ bản hơn và tìm ra các phương trình động lực học để xác định lực và moment xoắn cần thiết của bộ dẫn động để di chuyển robot, cũng như lực của các khớp. Phương pháp Lagrange chỉ cung cấp các phương trình vi phân cần thiết để xác định lực và moment xoắn của bộ dẫn động.

3.3.1. Động lực học Newton-Euler của khâu cứng

Hình 3-13 minh họa một khâu (i) của một cánh tay robot và các đặc tính vector vận tốc và gia tốc của nó. Hình 3-14 minh họa sơ đồ vật thể tự do của khâu (i). Lực $\mathbf{F}_{i-1}$ và moment $\mathbf{M}_{i-1}$ là lực và moment kết quả mà khâu $(i-1)$ tác dụng lên khâu (i) tại khớp i. Tương tự, $\mathbf{F}_i$ và $\mathbf{M}_i$ là lực và moment kết quả mà khâu (i) tác dụng lên khâu $(i+1)$ tại khớp $i+1$. Chúng ta đo và biểu thị hệ thống lực $(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{M}_{i-1})$ và $(\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i)$ tại gốc của hệ tọa độ B_{i-1} và B_i tương ứng.



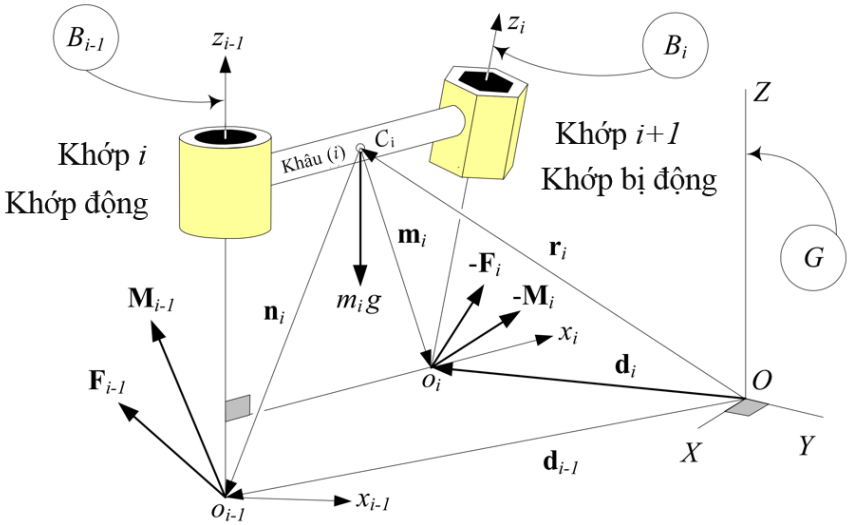
Hình 3-13 Khâu (i) và các đặc tính vector về động học của nó [1].

Tổng của các tải trọng bên ngoài tác động lên khâu (i) được biểu diễn bằng $\sum \mathbf{F}_{e_i}$ và $\sum \mathbf{M}_{e_i}$.

Các phương trình Newton-Euler về chuyển động cho khâu (i) trong hệ tọa độ toàn cục là:

$$ {}^0\boldsymbol{F}_{i-1} - {}^0\boldsymbol{F}_i + \sum {}^0\boldsymbol{F}_{e_i} = m_i\, {}^0\boldsymbol{a}_i \tag{3-149} $$

$$ \begin{aligned} &{}^0\boldsymbol{M}_{i-1} - {}^0\boldsymbol{M}_i + \sum {}^0\boldsymbol{M}_{e_i} \\ &+({}^0\boldsymbol{d}_{i-1} - {}^0\boldsymbol{r}_i) \times {}^0\boldsymbol{F}_{i-1} - ({}^0\boldsymbol{d}_i - {}^0\boldsymbol{r}_i) \times {}^0\boldsymbol{F}_i = {}^0I_i\, {}_0\boldsymbol{\alpha}_i \end{aligned} \tag{3-150} $$

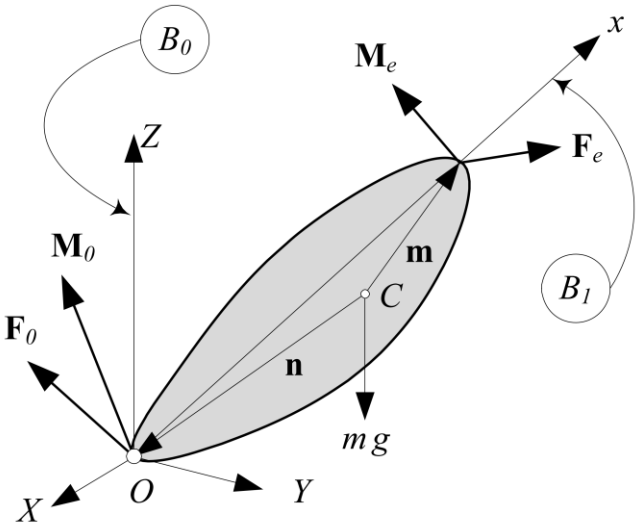


Hình 3-14 Hệ thống lực trên khâu i [1].

Ví dụ 3-21: Cánh tay robot một khâu.

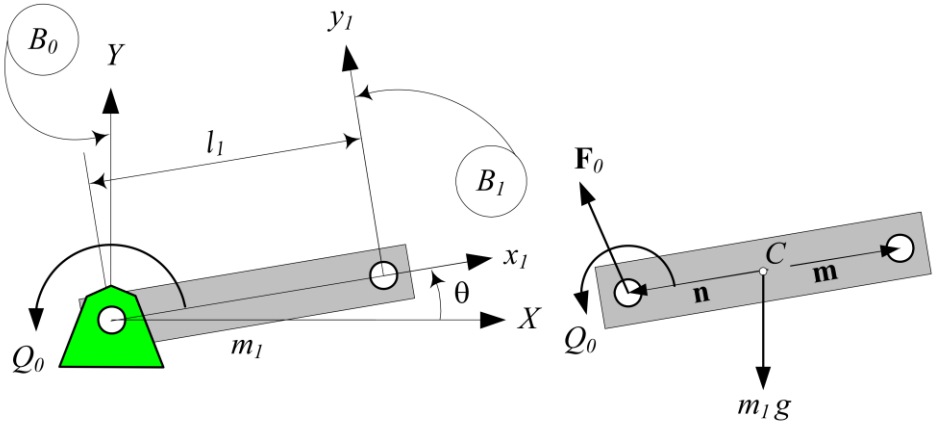
Hình 3-15 miêu tả một khâu được gắn vào mặt đất thông qua một khớp cầu tại điểm O. Sơ đồ vật thể tự do của khâubao gồm một ngoại lực và mô men tại điểm tác động cuối, trọng lực, và lực và mô men đẩy tại khớp. Các phương trình Newton-Euler cho khâu là:

$$ \begin{aligned} {}^0\boldsymbol{F}_0 + {}^0\boldsymbol{F}_e + mg\hat{K} &= m\,{}^0\boldsymbol{a}_C \\ {}^0\boldsymbol{M}_0 + {}^0\boldsymbol{M}_e + {}^0\boldsymbol{n} \times {}^0\boldsymbol{F}_0 + {}^0\boldsymbol{m} \times {}^0\boldsymbol{F}_e &= {}^0I_0\boldsymbol{\alpha}_1 \end{aligned} \tag{3-151} $$



Hình 3-15 Cánh tay robot một khâu.

Xem xét dải đồng nhất trong Hình 3-16(a). Hình 3-16(b) minh họa của thanh và các vector vị trí tương đối của nó là **m** và **n**.



(*a*) (*b*)

Hình 3-16 Thanh đồng nhất quay.

$$ {}^0\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2}cos\theta \\ \frac{l}{2}sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^0\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}cos\theta \\ -\frac{l}{2}sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-152} $$

Động học của thanh là:

$$ \begin{aligned} {}^0\boldsymbol{r}_1 &= -\,{}^0\boldsymbol{n}_1 \\ {}^0\boldsymbol{d}_1 &= -\,{}^0\boldsymbol{n}_1 + {}^0\boldsymbol{m}_1 \end{aligned} \tag{3-153} $$

Trong đó, ${}^0\mathbf{r}_1$ chỉ ra vị trí của C, và ${}^0\mathbf{d}_1$ chỉ ra vị trí của điểm tác động cuối, cả hai đều ở trong B_0.

$$
\begin{aligned}
&{}_0\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}\hat{K} \\
&{}_0\boldsymbol{\alpha}_1 = {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \ddot{\theta}\hat{K} \\
&\boldsymbol{g} = -g\hat{J} \\
&{}^0\boldsymbol{a}_C = {}_0\boldsymbol{\alpha}_1 \times {}^0\boldsymbol{r}_1 - {}_0\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_0\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0\boldsymbol{r}_1) \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\ddot{\theta}sin\theta + \frac{l}{2}\dot{\theta}^2(cos\theta) \\ \frac{l}{2}\ddot{\theta}cos\theta + \frac{l}{2}\dot{\theta}^2 sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3-154}
$$

Lực đang tác động lên thanh là:

$$
{}^0\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} \qquad {}^0\boldsymbol{F}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$
$$
{}^0\boldsymbol{M}_0 = \begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \\ Q_Z \end{bmatrix} \qquad {}^0\boldsymbol{M}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{3-155}
$$

Giả định rằng ${}^1I_1$ là ma trận moment khối lượng của dầm tính từ trọng tâm của nó.

$$
{}^1I_1 = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}
\tag{3-156}
$$

$$
{}^0R_1 = R_{Z,\theta} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\tag{3-157}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^0I_1 = R_{Z,\theta}\,{}^1I_1 R_{Z,\theta}^T = {}^0R_1 \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} {}^0R_1^T \\
&= \begin{bmatrix} I_x cos^2\theta + I_y sin^2\theta & (I_x - I_y)cos\theta sin\theta & 0 \\ (I_x - I_y)cos\theta sin\theta & I_y cos^2\theta + I_x sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3-158}
$$

Thay thế thông tin ở trên vào Công thức (3-151) sẽ cung cấp các phương trình chuyển động sau đây.

$$
{}^0\boldsymbol{F}_0 + {}^0\boldsymbol{F}_e + m_1\boldsymbol{g} = m_1\,{}^0\boldsymbol{a}_C
\tag{3-159}
$$

$$
\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_1 l(\ddot{\theta}sin\,\theta - \dot{\theta}^2 cos\theta) \\ \frac{1}{2}m_1 l(\ddot{\theta}cos\theta + \dot{\theta}^2 sin\theta) + m_1 g \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{3-160}
$$

$$
{}^0\boldsymbol{M}_0 + {}^0\boldsymbol{M}_e + {}^0\boldsymbol{n} \times {}^0\boldsymbol{F}_0 + {}^0\boldsymbol{m} \times {}^0\boldsymbol{F}_e = I_0\boldsymbol{\alpha}_1
\tag{3-161}
$$

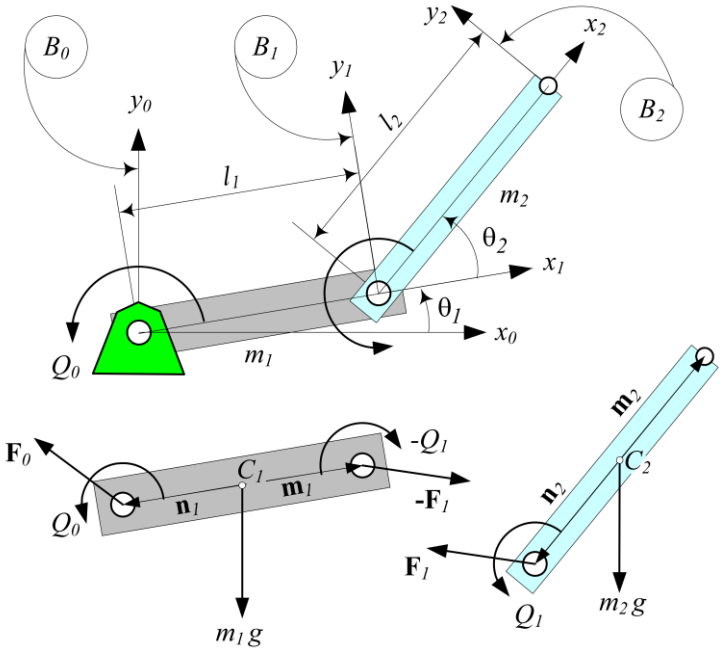
$$\begin{bmatrix} l \\ Q_X \\ Q_Y \\ Q_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{l}{2}F_Z cos\theta \\ I_z\ddot{\theta} + \frac{l}{2}F_Y cos\theta - \frac{l}{2}F_X sin\theta \end{bmatrix} \quad (3\text{-}162)$$

Thay thế các thành phần lực từ (3-160) để xác định các thành phần của moment lái ${}^0\boldsymbol{M}_0$.

$$\begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \\ Q_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(I_z + \frac{m_1 l^2}{4}\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m_1 g l cos\theta \end{bmatrix} \quad (3\text{-}163)$$

Ví dụ 3-22: Động lực học cánh tay robot phẳng 2R.

Một cánh tay robot phẳng 2R và sơ đồ khâu tự do của nó được hiển thị trong Hình 3-17. Các moment xoắn của các cơ cấu dẫn động là song song với trục Z và được xác định bởi Q_0 và Q_1. Phương trình Newton-Euler của chuyển động cho khâu đầu tiên là:



Hình 3-17 Sơ đồ khâu tự do của cánh tay robot phẳng 2R.

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{F}_0 - {}^0\boldsymbol{F}_1 + m_1 g\hat{J} &= m_1\, {}^0\boldsymbol{a}_1 \\ {}^0\boldsymbol{Q}_0 - {}^0\boldsymbol{Q}_1 + {}^0\boldsymbol{n}_1 \times {}^0\boldsymbol{F}_0 - {}^0\boldsymbol{m}_1 \times {}^0\boldsymbol{F}_1 &= {}^0I_1\, {}_0\boldsymbol{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (3\text{-}164)$$

Và các phương trình chuyển động cho khâu thứ hai là:

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{F}_1 + m_2 g\hat{J} &= m_2\, {}^0\boldsymbol{a}_2 \\ {}^0\boldsymbol{Q}_1 + {}^0\boldsymbol{n}_2 \times {}^0\boldsymbol{F}_1 &= {}^0I_2\, {}_0\boldsymbol{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (3\text{-}165)$$

Có bốn phương trình cho bốn ẩn số $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{Q}_0$ và $\mathbf{Q}_1$. Những phương trình này có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận.

$$[A]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (3\text{-}166)$$

trong đó,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ n_{1y} & -n_{1x} & 1 & -m_{1y} & m_{1x} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{2y} & -n_{2x} & 1 \end{bmatrix} \tag{3-167}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ Q_0 \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ Q_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} m_1 a_{1x} \\ m_1 a_{1y} - m_1 g \\ {}^0I_1 \alpha_1 \\ m_2 a_{2x} \\ m_2 a_{2y} - m_2 g \\ {}^0I_2 \alpha_2 \end{bmatrix}. \tag{3-168}$$

Ví dụ 3-23: Phương trình cho các bộ dẫn động khớp.

Trong động lực học robot, chúng ta không cần tìm lực khớp. Mô men xoắn của bộ dẫn động (actuator torques) quan trọng hơn nhiều vì chúng được sử dụng để điều khiển một robot. Trong Ví dụ 3-22, chúng ta xác định bốn phương trình cho hệ thống lực của các khớp của cánh tay robot 2R được hiển thị trong Hình 3-17.

$${}^0\boldsymbol{F}_0 - {}^0\boldsymbol{F}_1 + m_1 g\hat{\jmath} = {}^{m_1}{}^0\boldsymbol{a}_1 \tag{3-169}$$

$${}^0\boldsymbol{Q}_0 - {}^0\boldsymbol{Q}_1 + {}^0\boldsymbol{n}_1 \times {}^0\boldsymbol{F}_0 - {}^0\boldsymbol{m}_1 \times {}^0\boldsymbol{F}_1 = {}^0I_1\boldsymbol{\alpha}_1 \tag{3-170}$$

$${}^0\boldsymbol{F}_1 + m_2 g\hat{\jmath} = m_2\,{}^0\boldsymbol{a}_2 \tag{3-171}$$

$${}^0\boldsymbol{Q}_1 + {}^0\boldsymbol{n}_2 \times {}^0\boldsymbol{F}_1 = {}^0I_2\,{}_0\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{3-172}$$

Tuy nhiên, chúng ta có thể loại bỏ các lực khớp $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1$, và giảm số phương trình còn hai cho hai mô-men xoắn $\mathbf{Q}_0$ và $\mathbf{Q}_1$. Việc loại bỏ $\mathbf{F}_1$ giữa (3-171) và (3-172) cung cấp:

$${}^0\boldsymbol{Q}_1 = {}^0I_2\,{}_0\boldsymbol{\alpha}_2 - {}^0\boldsymbol{n}_2 \times \left(m_2\,{}^0\boldsymbol{a}_2 - m_2 g\hat{\jmath}\right) \tag{3-173}$$

Và loại bỏ $\mathbf{F}_0$ và $\mathbf{F}_1$ giữa (3-169) và (3-172) cho ra:

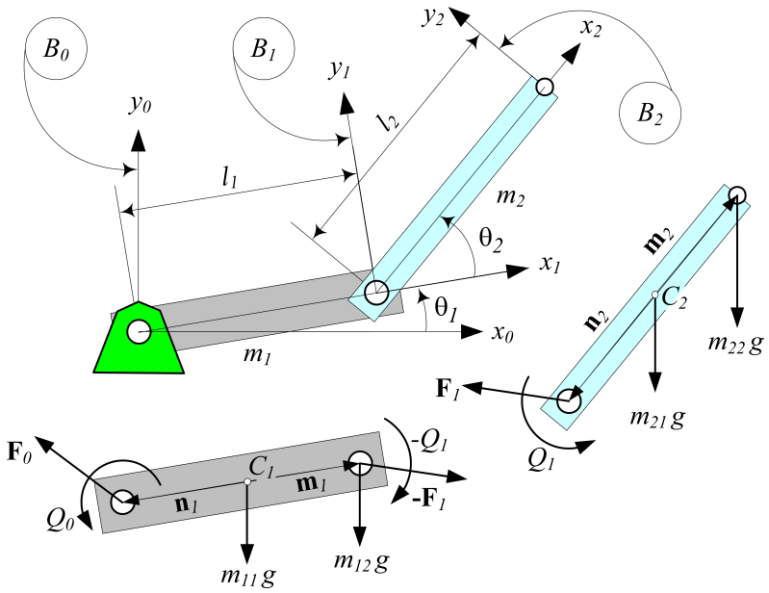
$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{Q}_0 = \quad & {}^0\boldsymbol{Q}_1 + {}^0I_{10}\boldsymbol{\alpha}_1 + {}^0\boldsymbol{m}_1 \times \left(m_2\,{}^0\boldsymbol{a}_2 - m_2 g, \hat{\jmath}\right) \\ & - {}^0\boldsymbol{n}_1 \times \left(m_1\,{}^0\boldsymbol{a}_1 - m_1 g\hat{\jmath} + m_2\,{}^0\boldsymbol{a}_2 - m_2 g\hat{\jmath}\right) \end{aligned} \tag{3-174}$$

Lực $\mathbf{F}_0$ và $\mathbf{F}_1$, được tính như sau:

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{F}_1 &= m_2\,{}^0\boldsymbol{a}_2 - m_2 g\hat{\jmath} \\ {}^0\boldsymbol{F}_0 &= m_1\,{}^0\boldsymbol{a}_1 + m_2\,{}^0\boldsymbol{a}_2 - (m_1 + m_2) g\hat{\jmath} \end{aligned} \tag{3-175}$$

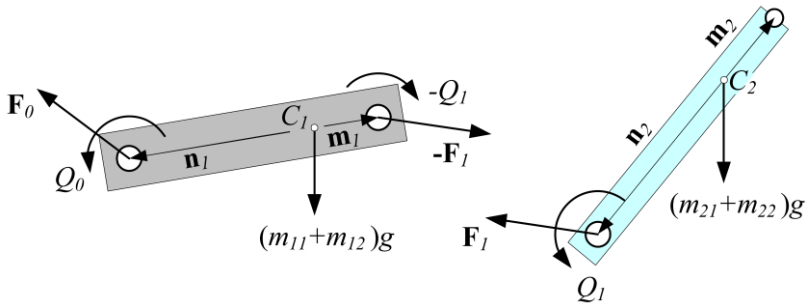
Ví dụ 3-24: Robot 2R phẳng với cánh tay và khớp gắn động cơ.

Trong tình huống thực tế cho các robot 2R phẳng, chúng ta thường có một động cơ ở khớp 0 để xoay khâu (1) và một động cơ ở khớp 1 để xoay khâu (2). Robot cũng có thể mang một vật nặng bằng cách kẹp ở điểm đầu khâu (2). Động cơ ở khớp 0 đặt trên mặt đất và trọng lượng của nó sẽ không ảnh hưởng đến động học của robot. Sơ đồ của cánh tay robot như Hình 3-18.



Hình 3-18 Robot 2R phẳng với cánh tay và khớp nặng.

Những khớp nặng sẽ làm thay đổi vị trí của C_i và thay đổi các vector vị trí tương đối m và n. Chúng ta sẽ có các phương trình chuyển động giống như (3-164)-(3-165) nếu chúng ta xác định m và n cho vị trí mới của C_i như được đề xuất trong Hình 3-19.



Hình 3-19 Xác định các vector m và n cho vị trí mới của trọng tâm khối lượng C_i.

$$\begin{gathered} {}^0\boldsymbol{F}_0 - {}^0\boldsymbol{F}_1 + (m_{11} + m_{12})g\hat{J} = m_1\, {}^0\boldsymbol{a}_1 \\ {}^0\boldsymbol{Q}_0 - {}^0\boldsymbol{Q}_1 + {}^0\boldsymbol{n}_1 \times {}^0\boldsymbol{F}_0 - {}^0\boldsymbol{m}_1 \times {}^0\boldsymbol{F}_1 = {}^0I_1\, {}_0\boldsymbol{\alpha}_1 \\ {}^0\boldsymbol{F}_1 + (m_{21} + m_{22})g\hat{J} = (m_{21} + m_{22})\, {}^0\boldsymbol{a}_2 \\ {}^0\boldsymbol{Q}_1 + {}^0\boldsymbol{n}_2 \times {}^0\boldsymbol{F}_1 = {}^0I_2\, {}_0\boldsymbol{\alpha}_2. \end{gathered} \tag{3-176}$$

Chúng ta có thể biểu thị dưới dạng các khối lượng như sau

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{11} + m_{12} \\ m_2 &= m_{21} + m_{22} \end{aligned} \tag{3-177}$$

và sử dụng các phương trình (3-171)-(3-172) cùng với các trọng tâm không đối xứng.

3.3.2. Động lực học Lagrange cho robot

Phương trình Lagrange về chuyển động cung cấp một phương pháp có hệ thống để thu được các phương trình động lực học cho các robot. Hàm Lagrange được xác định là sự khác biệt giữa động năng và thế năng.

$$\mathcal{L} = K - V. \tag{3-178}$$

Phương trình Lagrange về chuyển động cho một hệ thống robot có thể được xác định bằng cách áp dụng phương trình Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,2,\cdots n \tag{3-179}$$

Trong đó q_i là tọa độ mà năng lượng được biểu thị, và Q_i là lực tổng quát để dẫn động q_i.

Phương trình chuyển động cho một tay máy n khâu nối tiếp có thể được thiết lập dưới dạng ma trận.

$$D(q)\ddot{q} + H(q,\dot{q}) + G(q) = Q \tag{3-180}$$

hoặc

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Q \tag{3-181}$$

hoặc dưới dạng tổng hợp

$$\sum_{j=1}^{n} D_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} H_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m + G_i = Q_i. \tag{3-182}$$

D_{ij} là một ma trận đối xứng loại quán tính có kích thước $n \times n$.

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{J}_{Dk}^{T} m_k \boldsymbol{J}_{Dk} + \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_{Rk}^{T}\,{}^{0}I_k\boldsymbol{J}_{Rk}\right) \tag{3-183}$$

H_{ikm} là vector kết hợp vận tốc.

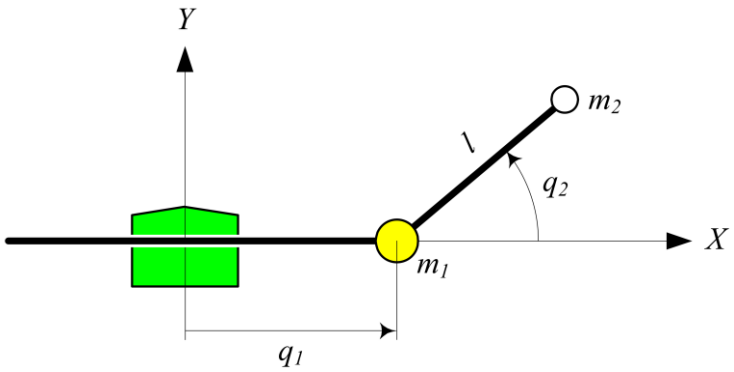
$$H_{ijk} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i}\right) \tag{3-184}$$

Và G_i là vector trọng lực.

$$G_i = \sum^{n} m_j \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{J}_{Dj}^{(i)}. \tag{3-185}$$

Ví dụ 3-25: Cánh tay robot phẳng có cấu trúc xoay - trượt.

Hình 3-20 minh họa một cánh tay robot phẳng với các khâu không khối lượng và hai điểm có khối lượng lớn m_1 và m_2. Để xác định các phương trình chuyển động, chúng ta bắt đầu bằng cách tính động năng.



Hình 3-20 Robot phẳng có cấu trúc xoay - trượt.

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 \\ K_2 &= \frac{1}{2}m_2\dot{X}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{Y}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2\left(\frac{d}{dt}(q_1 + lcosq_2)\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{d}{dt}(lsinq_2)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1 - l\dot{q}_2 sinq_2)^2 + \frac{1}{2}m_2(l\dot{q}_2 cosq_2) \\ &= \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2 + l^2\dot{q}_2^2 - 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 sinq_2) \end{aligned} \quad (3\text{-}186)$$

Thế năng của cánh tay robot là:

$$V = m_2 g Y_2 = m_2 g l sinq_2 \quad (3\text{-}187)$$

Do đó, hàm Lagrange là:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= K - V = K_1 + K_2 - V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2 + l^2\dot{q}_2^2 - 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 sinq_2) - m_2 g l sinq_2 \end{aligned} \quad (3\text{-}188)$$

Áp dụng phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,2 \quad (3\text{-}189)$$

Ta có các phương trình chuyển động sau

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2 l\ddot{q}_2 sinq_2 - m_2 l\dot{q}_2^2 cosq_2 &= Q_1 \\ m_2 l^2\ddot{q}_1 - m_2 l\ddot{q}_1 sinq_2 + m_2 g l cosq_2 &= Q_2 \end{aligned} \quad (3\text{-}190)$$

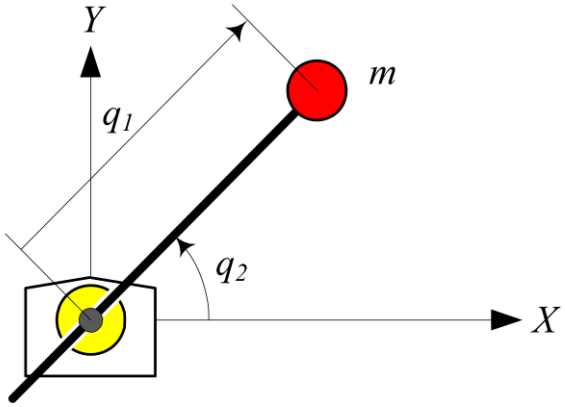
Chúng ta có thể sắp xếp lại các phương trình này thành dạng của (3-181).

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{bmatrix} \quad (3\text{-}191)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} D(q) &= \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 l sinq_2 \\ m_2 l^2 & -m_2 l sinq_2 \end{bmatrix} \\ C(q,\dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l\dot{q}_2 cosq_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g l cosq_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3\text{-}192)$$

Ví dụ 3-26: Cánh tay robot phẳng và có khả năng xoay.



Hình 3-21 Cánh tay robot phẳng và có khả năng xoay.

Hình 3-21 minh họa một cánh tay robot phẳng và có khả năng xoay với một khâu không khối lượng và một điểm khối lượng lớn m.

Động năng của cánh tay robot là:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_2\dot{X}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{Y}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{dt}(q_1 cosq_2)\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{dt}(q_1 sinq_2)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2) \end{aligned} \tag{3-193}$$

Thế năng của cánh tay robot là:

$$V = mgY_2 = mgq_1 sinq_2 \tag{3-194}$$

Do đó, hàm Lagrange của cánh tay robot là:

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2) - mgq_1 sinq_2 \tag{3-195}$$

Áp dụng phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,2 \tag{3-196}$$

Các phương trình chuyển động như sau

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - mq_1\dot{q}_2^2 + mgsinq_2 &= Q_1 \\ mq_1^2\ddot{q}_2 + 2mq_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + mgq_1 cosq_2 &= Q_2 \end{aligned} \tag{3-197}$$

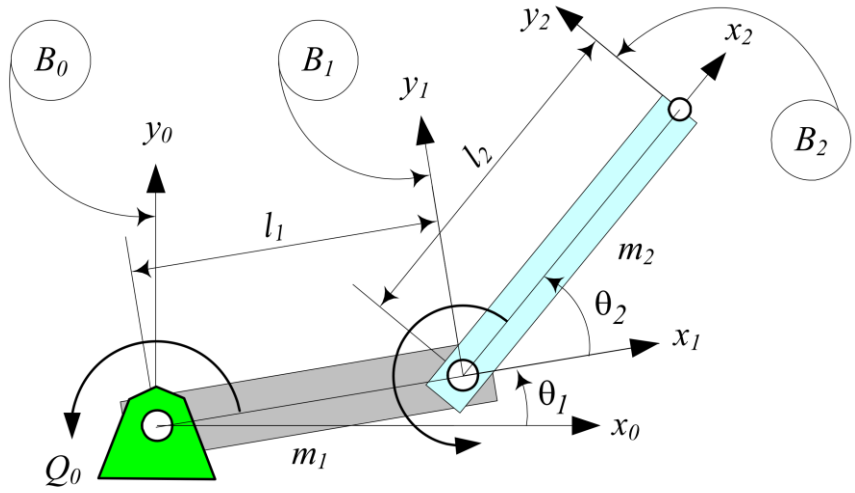
Sắp xếp lại các phương trình này thành dạng ma trận:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{bmatrix} \tag{3-198}$$

trong đó,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mq_1^2 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -mq_1\dot{q}_2 \\ mq_1\dot{q}_2 & mq_1\dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}199)$$
$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} mgsinq_2 \\ mgq_1cosq_2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3-27: Phương trình Lagrange cho tay máy phẳng 2R với cánh tay nặng.



Hình 3-22 Tay máy phẳng 2R với cánh tay nặng.

Một tay máy phẳng 2R được hiển thị trong Hình 3-22. Ma trận biến đổi đồng nhất của nó được cung cấp trong Công thức (2-343) và (2-344).

$$^0R_1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$^1R_2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}200)$$

Giả sử rằng các khâu được làm từ vật liệu đồng nhất có hình dạng thanh, các vector vị trí của trọng tâm C_i là:

$$^i\boldsymbol{r}_i = \begin{bmatrix} -l_i/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; i = 1,2 \quad (3\text{-}201)$$

và các ma trận quán tính là:

$$^iI_i = \frac{1}{12} m_i l_i^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}202)$$

do đó,

$$
\begin{aligned}
{}^0I_1 &= {}^0R_1\,{}^1I_1\,{}^0R_1^T \\
&= \frac{1}{12}m_1l_1^2\begin{bmatrix} sin^2\theta_1 & -cos\theta_1 sin\theta_1 & 0 \\ -cos\theta_1 sin\theta_1 & cos^2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0I_2 &= {}^0R_2\,{}^2I_2\,{}^0R_2^T \\
&= \frac{1}{12}m_2l_2^2\begin{bmatrix} sin^2\theta_{12} & -cos\theta_{12} sin\theta_{12} & 0 \\ -cos\theta_{12} sin\theta_{12} & cos^2\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3-203}
$$

Trọng lực được giả định hướng về phía $-\hat{J}_0$.

$$
\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-204}
$$

và các ma trận Jacobian khâu là

$$
J_{D1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 sin\theta_1 & 0 \\ \frac{1}{2}l_1 cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
J_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-205}
$$

$$
J_{D2} = \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 - \frac{1}{2}l_2 sin\theta_{12} & -\frac{1}{2}l_2 sin\theta_{12} \\ l_1 cos\theta_1 + \frac{1}{2}l_2 cos\theta_{12} & \frac{1}{2}l_2 cos\theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{J}_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3-206}
$$

Ma trận quán tính của tay máy là:

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{2}\left(J_{Di}^T m_i J_{Di} + \frac{1}{2}J_{Ri}^T\,{}^0I_i J_{Ri}\right) \\
&= J_{D1}^T m_1 J_{D1} + \frac{1}{2}J_{R1}^T\,{}^0I_1 J_{R1} + J_{D2}^T m_2 J_{D2} + \frac{1}{2}J_{R2}^T\,{}^0I_2 J_{R2} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2\left(l_1^2 + l_1l_2c\theta_2 + \frac{1}{3}l_2^2\right) & m_2\left(\frac{1}{2}l_1l_2c\theta_2 + \frac{1}{3}l_2^2\right) \\ m_2\left(\frac{1}{2}l_1l_2c\theta_2 + \frac{1}{3}l_2^2\right) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-207}
$$

Vector kết hợp vận tốc H có hai phần tử là

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{j=1}^{1}\sum_{k=1}^{1}\left(\frac{\partial D_{1j}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_1}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \\ &= -m_2 l_1 l_2\left(\dot{\theta}_1+\frac{1}{2}\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_2 sin\,\theta_2 \\ H_2 &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial D_{2j}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_2}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1^2 sin\,\theta_2. \end{aligned} \tag{3-208}$$

Các thành phần của vector lực trọng trường G là:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2}m_1 g l_1 cos\theta_1 + m_2 g l_1 cos\theta_1 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 cos\theta_{12} \\ G_2 &= \frac{1}{2}m_2 g l_2 cos\theta_{12} \end{aligned} \tag{3-209}$$

Lập phương trình chuyển động cho tay máy phẳng 2R. Giả sử không có ngoại lực tác động lên khâu chấp hành cuối, các phương trình chuyển động là:

$$\begin{aligned} Q_1 = &\left(\frac{1}{3}m_1 l_1^2 + m_2\left(l_1^2 + l_1 l_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}l_2^2\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\ &+m_2 l_2\left(\frac{1}{2}l_1 c\theta_2 + \frac{1}{3}l_2\right)\ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2\left(\dot{\theta}_1+\frac{1}{2}\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_2 sin\theta_2 \\ &+\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)g l_1 cos\theta_1 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 cos\theta_{12} \end{aligned} \tag{3-210}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = &\; m_2\left(\frac{1}{2}l_1 l_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}l_2^2\right)\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 \\ &+\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1^2 sin\theta_2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 cos\theta_{12}. \end{aligned} \tag{3-211}$$

3.3.3. Phương trình Lagrange và ma trận biến đổi khâu

Biểu thức ma trận của các phương trình chuyển động cho một robot, dựa trên các phương trình Lagrange là

$$\boldsymbol{D(q)\ddot{q} + H(q,\dot{q}) + G(q) = Q} \tag{3-212}$$

cũng có thể được viết dưới dạng tổng

$$\sum_{j=1}^{n} D_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m + G_i = Q_i \tag{3-213}$$

Ma trận $\boldsymbol{D(q)}$ là một ma trận đối xứng loại quán tính kích thước $n \times n$

$$D_{ij} = \sum_{r=maxi,j}^{n} tr\left(\frac{\partial^0 T_r}{\partial q_i}\,{}^r\bar{I}_r\frac{\partial^0 T_r^T}{\partial q_j}\right) \tag{3-214}$$

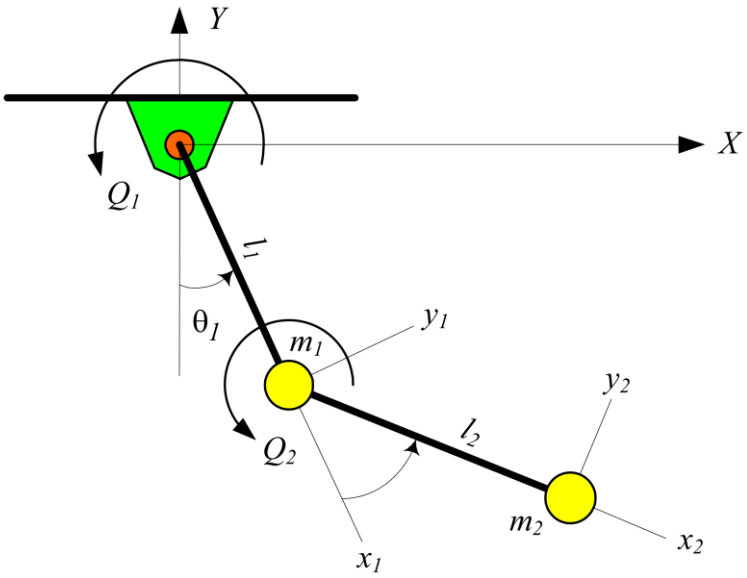
và H_{ikm} là cụm kết nối vận tốc

$$H_{ijk} = \sum_{r=maxi,j,k}^{n} tr\left(\frac{\partial^{20} T_r}{\partial q_j \partial q_k} {}^r\bar{I}_r \frac{\partial^0 T_r^T}{\partial q_i}\right) \tag{3-215}$$

Và G_i là vector trọng lực.

$$G_i = -\sum_{r=i}^{n} m_r \boldsymbol{g}^T \frac{\partial^0 T_r}{\partial q_i} {}^r\boldsymbol{r}_r \tag{3-216}$$

Ví dụ 3-28: Tay máy 2R được gắn trên trần.



Hình 3-23 Tay máy 2R được gắn trên trần.

Hình 3-23 mô tả một tay máy phẳng 2R lý tưởng được gắn trên trần nhà. Việc gắn trên trần là một phương pháp được áp dụng trong một số dây chuyền lắp ráp do robot điều khiển.
Hàm Lagrange của cánh tay robot là

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \quad & K - V = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) cos\theta_2 \right) \\ & + m_1 g l_1 cos\theta_1 + m_2 g \left(l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \right)\end{aligned} \tag{3-217}$$

dẫn đến các phương trình chuyển động sau:

$$\begin{aligned} Q_1 = \quad & \left((m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 cos\theta_2 \right) \ddot{\theta}_1 \\ & + m_2 l_2 (l_2 + l_1 cos\theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ & - 2 m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + (m_1 + m_2) g l_1 sin\theta_1 + m_2 g l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ Q_2 = \quad & m_2 l_2 (l_2 + l_1 cos\theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ & - 2 m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - m_2 g l_2 sin(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \tag{3-218}$$

Các phương trình chuyển động có thể sắp xếp lại như sau:

$$\begin{aligned} Q_1 = \; & D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + H_{111}\dot{\theta}_1^2 + H_{122}\dot{\theta}_2^2 \\ & + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + G_1 \\ Q_2 = \; & D_{12}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + H_{211}\dot{\theta}_1^2 + H_{222}\dot{\theta}_2^2 \\ & + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + G_2 \end{aligned} \tag{3-219}$$

trong đó,

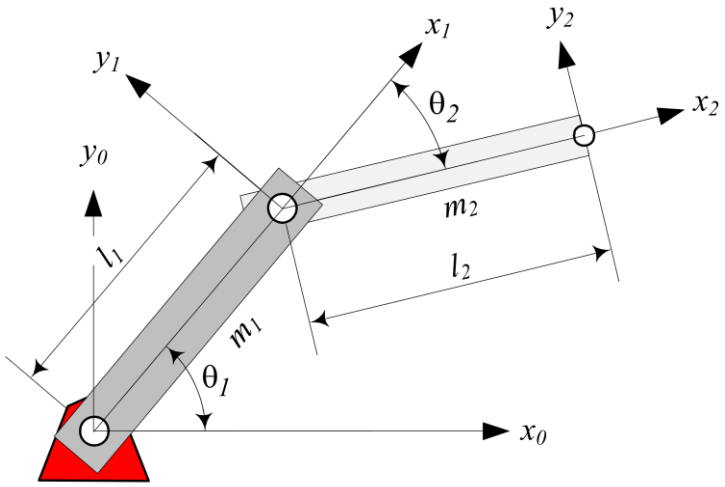
$$\begin{aligned} D_{11} = \; & (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 cos\theta_2 \\ D_{12} = \; & m_2 l_2 (l_2 + l_1 cos\theta_2) \\ D_{21} = \; & D_{12} = m_2 l_2 (l_2 + l_1 cos\theta_2) \\ D_{22} = \; & m_2 l_2^2 \\ & H_{111} = 0 \\ & H_{122} = -m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \\ & H_{211} = -m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \end{aligned} \tag{3-220}$$

$$\begin{aligned} & H_{222} = 0 \\ & H_{112} = H_{121} = -m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \\ & H_{212} = H_{221} = -m_2 l_1 l_2 sin\theta_2 \end{aligned} \tag{3-221}$$

$$\begin{aligned} G_1 = \; & (m_1 + m_2) g l_1 sin\theta_1 + m_2 g l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ G_2 = \; & m_2 g l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Ví dụ 3-29: Cánh tay robot 2R với các khâu nặng.

Cánh tay robot 2R với các khâu nặng được hiển thị trong Hình 3-24. Chúng ta giả định trọng tâm C của mỗi khâu nằm ở giữa của khâu và các động cơ tại mỗi khớp không khối lượng. Các ma trận biến đổi của các khớp là:



Hình 3-24 Cánh tay robot 2R với các khâu nặng.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1 cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & l_1 sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-222}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & l_2 cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & l_2 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-223}$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_2 &= {}^0T_1\,{}^1T_2 \\
&= \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3-224}
$$

Sử dụng ma trận hệ số vận tốc Δ_R cho các khớp quay, chúng ta có thể viết thành:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial {}^0T_1}{\partial \theta_1} &= \Delta_R\,{}^0T_1 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & l_1sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -sin\theta_1 & -cos\theta_1 & 0 & -l_1sin\theta_1 \\ cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-225}
$$

tương tự như vậy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial {}^0T_2}{\partial \theta_1} &= \Delta_R^0 T_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12} \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -s(\theta_1+\theta_2) & -c(\theta_1+\theta_2) & 0 & -l_1s\theta_1 - l_2s(\theta_1+\theta_2) \\ c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-226}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial {}^0T_2}{\partial \theta_2} &= {}^0T_1\Delta_R\,{}^1T_2 \\
&= \begin{bmatrix} -s(\theta_1+\theta_2) & -c(\theta_1+\theta_2) & 0 & -l_2s(\theta_1+\theta_2) \\ c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_2c(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3-227}
$$

Giả sử tất cả các sản phẩm của quán tính đều bằng không, chúng ta tìm thấy

$$
{}^1\bar{I}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_1l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_1l_1 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \tag{3-228}
$$

$$ {}^{2}\bar{I}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2 l_2^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{3-229} $$

Sử dụng quán tính và đạo hàm của ma trận biến đổi, chúng ta có thể tính toán ma trận đối xứng loại quán tính $D(q)$.

$$ \begin{aligned} D_{11} &= tr\left(\frac{\partial {}^{0}T_1}{\partial q_1}\,{}^{1}\bar{I}_1\frac{\partial {}^{0}T_1^T}{\partial q_1}\right) + tr\left(\frac{\partial {}^{0}T_2}{\partial q_1}\,{}^{2}\bar{I}_2\frac{\partial {}^{0}T_2^T}{\partial q_1}\right) \\ &= \frac{1}{3}m_1 l_1^2 + m_2\left(l_1^2 + \frac{1}{3}l_2^2\right) + m_2 l_1 l_2 cos\theta_2 \end{aligned} \tag{3-230} $$

$$ \begin{aligned} D_{12} = D_{21} &= tr\left(\frac{\partial {}^{0}T_2}{\partial q_1}\,{}^{2}\bar{I}_2\frac{\partial {}^{0}T_2}{\partial q_1}\right) \\ &= \frac{1}{3}m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 cos\theta_2 \end{aligned} \tag{3-231} $$

$$ D_{22} = tr\left(\frac{\partial {}^{0}T_2}{\partial q_2}\,{}^{2}\bar{I}_2\frac{\partial {}^{0}T_2}{\partial q_2}\right) = \frac{1}{3}l_2^2 m_2 \tag{3-232} $$

Các cụm kết hợp H(q, q̇) được tính như sau

$$ \begin{aligned} H_1 &= \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} H_{1km}\dot{q}_k\dot{q}_m \\ &= H_{111}\dot{q}_1\dot{q}_1 + H_{112}\dot{q}_1\dot{q}_2 + H_{121}\dot{q}_2\dot{q}_1 + H_{122}\dot{q}_2\dot{q}_2 \end{aligned} \tag{3-233} $$

$$ \begin{aligned} H_2 &= \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} H_{2km}\dot{q}_k\dot{q}_m \\ &= H_{211}\dot{q}_1\dot{q}_1 + H_{212}\dot{q}_1\dot{q}_2 + H_{221}\dot{q}_2\dot{q}_1 + H_{222}\dot{q}_2\dot{q}_2 \end{aligned} \tag{3-234} $$

trong đó,

$$ H_{ijk} = \sum_{r=maxi,j,k}^{n} tr\left(\frac{\partial^2 {}^{0}T_r}{\partial q_j \partial q_k}\,r\bar{I}_r\frac{\partial {}^{0}T_r^T}{\partial q_i}\right). \tag{3-235} $$

Các tính toán này dẫn đến

$$ H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin\theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 sin\theta_2 \\ \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sin\theta_2 \end{bmatrix}. \tag{3-236} $$

Các cụm cuối cùng là vector trọng lực $G(q)$

$$
\begin{aligned}
G_1 &= -m_1 g^T \frac{\partial {}^0T_1}{\partial q_1} {}^1r_1 - m_2 g^T \frac{\partial {}^0T_2}{\partial q_1} {}^2r_2 \\
&= -m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -sin\theta_1 & -cos\theta_1 & 0 & -l_1 sin\theta_1 \\ cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & l_1 cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad -m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s\theta_{12} & -c\theta_{12} & 0 & -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} \\ c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} m_1 g l_1 cos\theta_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_1 cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 g l_1 cos\theta_1
\end{aligned} \tag{3-237}
$$

$$
\begin{aligned}
G_2 &= -m_2 \boldsymbol{g}^T \frac{\partial {}^0T_2}{\partial q_2} {}^2\boldsymbol{r}_2 \\
&= -m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s\theta_{12} & -c\theta_{12} & 0 & -l_2 s\theta_{12} \\ c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_2 c\theta_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2).
\end{aligned} \tag{3-238}
$$

Các phương trình chuyển động cho cánh tay robot phẳng 2R là:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + m_2 \left(l_1^2 + \frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2 \right) & m_2 \left(l_1^2 + \frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2 \right) \\ \left(l_1^2 + \frac{1}{3} l_2^2 \right) m_2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2 & \frac{1}{3} l_2^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin\theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin\theta_2 \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 g l_1 cos\theta_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_1 cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 g l_1 cos\theta_1 \\ \frac{1}{2} m_2 g l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-239}
$$

3.3.4. Tĩnh học Robot

Ở đầu và ở cuối của một nhiệm vụ từ vị trí nghỉ đến vị trí nghỉ, một robot phải giữ các cấu hình đã được xác định. Để giữ vị trí và hướng, các bộ dẫn động phải tác dụng một số lực cần thiết để cân bằng các tải trọng bên ngoài được tác dụng vào robot. Việc tính toán lực cần thiết

của các bộ dẫn động để giữ cho robot ở trong một cấu hình cụ thể được gọi là phân tích tĩnh của robot.

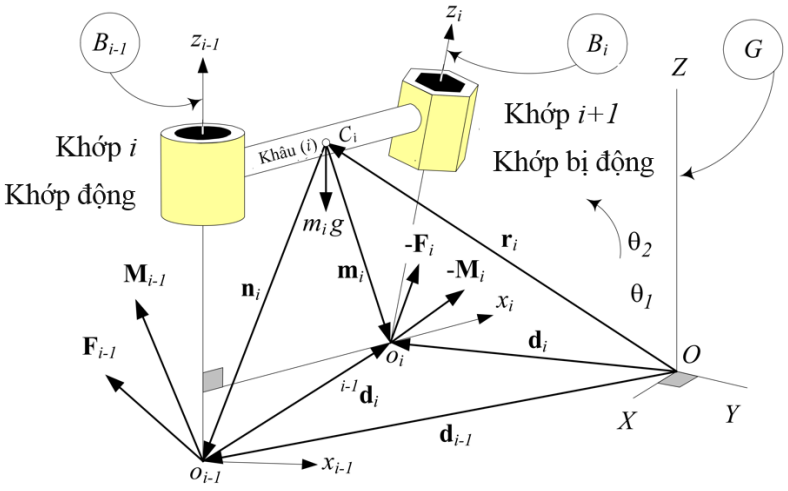
Dưới điều kiện tĩnh, phương trình Newton-Euler toàn cục cho khâu (i) có thể được viết dưới dạng đệ quy.

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{F}_{i-1} &= {}^0\boldsymbol{F}_i - \sum {}^0\boldsymbol{F}_{e_i} \\ {}^0\boldsymbol{M}_{i-1} &= {}^0\boldsymbol{M}_i - \sum {}^0\boldsymbol{M}_{e_i} + {}_{i-1}{}^0\boldsymbol{d}_i \times {}^0\boldsymbol{F}_i \end{aligned} \tag{3-240}$$

trong đó,

$${}^0_{i-1}\boldsymbol{d}_i = {}^0\boldsymbol{d}_i - {}^0\boldsymbol{d}_{i-1}. \tag{3-241}$$

Vì vậy, chúng tôi có thể tính toán hệ thống lực tác động $(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{M}_{i-1})$ khi hệ thống phản lực $(-\mathbf{F}_i, -\mathbf{M}_i)$ được cung cấp. Các vector vị trí và hệ thống lực trên khâu (i) được hiển thị trong Hình 3-25.



Hình 3-25 Các vector vị trí và hệ thống lực trên khâu (i) [1].

Ví dụ 3-30: Trạng thái tĩnh của một cánh tay robot phẳng 4R.

Hình 3-26 minh họa một cánh tay robot phẳng 4R với các hệ tọa độ DH được thiết lập cho mỗi khâu. Giả sử hệ thống lực khâu chấp hành cuối tác động lên môi trường được xác định như sau:

$${}^4\boldsymbol{F}_4 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^4\boldsymbol{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} \tag{3-242}$$

Ngoài ra, chúng ta giả định rằng các khâu đều đồng nhất sao cho trọng tâm của chúng được đặt ở giữa của mỗi khâu, và gia tốc trọng trường là:

$$\boldsymbol{g} = -g\hat{\jmath}_0 \tag{3-243}$$

Cánh tay robot bao gồm bốn khâu $R \parallel R(0)$, do đó ma trận biến đổi của chúng ${}^{i-1}T_i$ thuộc lớp (2-346) vì $d_i = 0$ và $a_i = l_i$, nên đơn giản hóa thành

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i & 0 & l_i cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i & 0 & l_i sin\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-244}$$

Các vector vị trí vị trí C, ${}^{i}\mathbf{r}_i$ và các vector vị trí tương đối ${}^{0}_{i-1}\mathbf{d}_i$ là:

$$ {}^{i}\boldsymbol{r}_i = \begin{bmatrix} l_i/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{i}_{i-1}\boldsymbol{d}_i = \begin{bmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-245} $$

và do đó,

$$ \begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{r}_i &= {}^{0}T_i \, {}^{i}\boldsymbol{r}_i \\ {}^{0}_{i-1}\boldsymbol{d}_i &= {}^{0}T_i \, {}_{i-1}\boldsymbol{d}_i \end{aligned} \tag{3-246} $$

trong đó

$$ {}^{0}T_i = {}^{0}T_1 \cdots {}^{i-1}T_i. \tag{3-247} $$

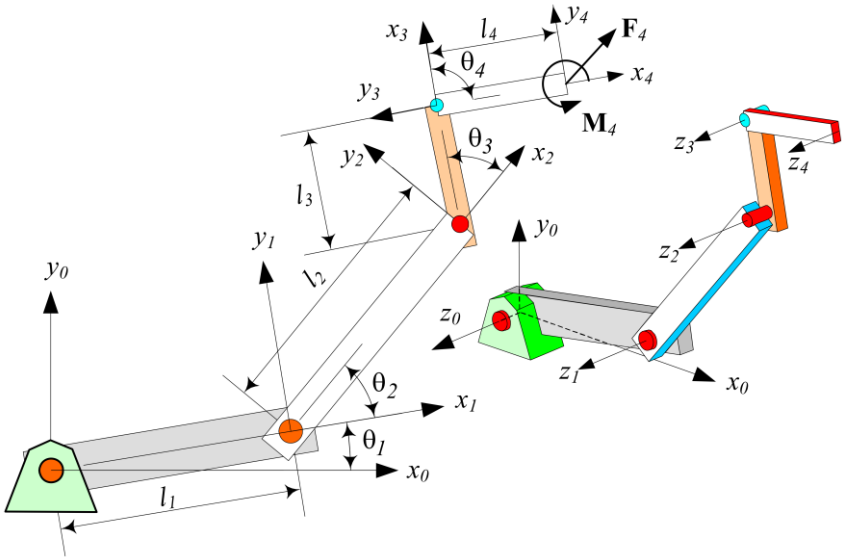
Động lực tĩnh tại các khớp 3, 2 và 1 là

$$ \begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{F}_3 &= {}^{0}\boldsymbol{F}_4 - \sum {}^{0}\boldsymbol{F}_{e_4} = {}^{0}\boldsymbol{F}_4 + m_4 g \, {}^{0}\hat{\jmath}_0 \\ &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_4 g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + m_4 g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-248} $$

$$ \begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{F}_2 &= {}^{0}\boldsymbol{F}_3 - m_3 g \, {}^{0}\hat{\jmath}_0 \\ &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + m_4 g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_3 g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + (m_3 + m_4) g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-249} $$

$$ \begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{F}_1 &= {}^{0}\boldsymbol{F}_2 - m_2 g \, {}^{0}\hat{\jmath}_0 \\ &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + (m_3 + m_4) g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + g(m_2 + m_3 + m_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-250} $$

$$ \begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{F}_0 &= {}^{0}\boldsymbol{F}_1 - m_1 g \, {}^{0}\hat{\jmath}_0 \\ & F_x \\ &= \begin{bmatrix} F_y + g(m_2 + m_3 + m_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_1 g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + g(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3-251} $$



Hình 3-26 Cánh tay robot 4R.

Moments tĩnh ở các khớp 3, 2 và 1 là

$$\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{M}_3 &= {}^0\boldsymbol{M}_4 - \sum {}^0\boldsymbol{M}_{e_i} + {}^0_3\boldsymbol{d}_4 \times {}^0\boldsymbol{F}_4 \\
&= {}^0\boldsymbol{M}_4 + {}^0\boldsymbol{r}_4 \times m_4 g\, {}^0\hat{\jmath}_0 + {}^0_3\boldsymbol{d}_4 \times {}^0\boldsymbol{F}_4 \\
&= {}^0\boldsymbol{M}_4 + {}^0\boldsymbol{r}_4 \times m_4 g {}^0\hat{\jmath}_0 + {}^0_3\boldsymbol{d}_4 \times {}^0\boldsymbol{F}_4 \\
&= {}^0\boldsymbol{M}_4 + m_4 g({}^0T_4\, {}^4\boldsymbol{r}_4 \times {}^0\hat{\jmath}_0) + ({}^0T_4\, {}^4_3\boldsymbol{d}_4) \times {}^0\boldsymbol{F}_4 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{3z} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-252}$$

$$\begin{aligned}
M_{3z} = M_z \quad & + l_4 F_y cos\theta_{1234} - l_4 F_x sin\theta_{1234} + \frac{1}{2} g l_4 m_4 cos\theta_{1234} \\
{}^0\boldsymbol{M}_2 \quad &= {}^0\boldsymbol{M}_3 + m_3 g({}^0T_3\, {}^3\boldsymbol{r}_3 \times {}^0\hat{\jmath}_0) + ({}^0T_3\, {}^3_2\boldsymbol{d}_3) \times {}^0\boldsymbol{F}_3 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2z} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-253}$$

$$\begin{aligned}
M_{2z} = \quad & M_z + l_4 F_y cos\theta_{1234} - l_4 F_x sin\theta_{1234} + \frac{1}{2} g l_4 m_4 cos\theta_{1234} \\
& + \frac{1}{2} g l_3 m_3 cos\theta_{123} - l_3 F_x sin\theta_{123} \\
& + l_3 (F_y + g m_4) cos\theta_{123} \\
{}^0\boldsymbol{M}_1 = \quad & {}^0\boldsymbol{M}_2 + m_2 g({}^0T_2\, {}^2\boldsymbol{r}_2 \times {}^0\hat{\jmath}_0) + ({}^0T_2\, {}^2_1\boldsymbol{d}_2) \times {}^0\boldsymbol{F}_2 \\
= \quad & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{1z} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-254}$$

$$\begin{aligned} M_{1z} = \; & M_z + l_4 F_y cos\theta_{1234} - l_4 F_x sin\theta_{1234} + \frac{1}{2} g l_4 m_4 cos\theta_{1234} \\ & + \frac{1}{2} g l_3 m_3 cos\theta_{123} - l_3 F_x sin\theta_{123} + l_3 cos\theta_{123}\left(F_y + g m_4\right) \\ & + \frac{1}{2} g l_2 m_2 cos\theta_{12} - l_2 F_x sin\theta_{12} \\ & + l_2 cos\theta_{12}\left(F_y + g(m_3 + m_4)\right) \end{aligned} \tag{3-255}$$

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{M}_0 = \; & {}^0\boldsymbol{M}_1 + m_1 g({}^0T_1\, {}^1\boldsymbol{r}_1 \times {}^0\hat{\jmath}_0) + ({}^0T_1\, {}^1_0\boldsymbol{d}_1) \times {}^0\boldsymbol{F}_1 \\ = \; & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{0z} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-256}$$

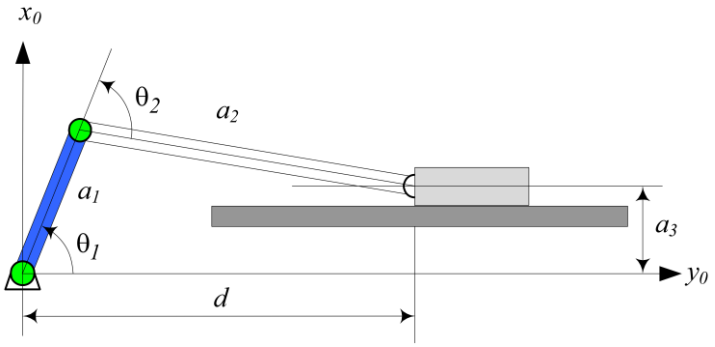
$$\begin{aligned} M_{0z} = \; & M_z + l_4 F_y cos\theta_{1234} - l_4 F_x sin\theta_{1234} + \frac{1}{2} g l_4 m_4 cos\theta_{1234} \\ & + \frac{1}{2} g l_3 m_3 cos\theta_{123} - l_3 F_x sin\theta_{123} + l_3 cos\theta_{123}\left(F_y + g m_4\right) \\ & - l_2 F_x sin\theta_{12} + \frac{1}{2} g l_2 m_2 cos\theta_{12} + l_2 cos\theta_{12}\left(F_y + g(m_3 + m_4)\right) \\ & + \frac{1}{2} g l_1 m_1 cos\theta_1 - l_1 F_x sin\theta_1 \\ & + l_1 cos\theta_1\left(F_y + g(m_2 + m_3 + m_4)\right) \end{aligned} \tag{3-257}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \theta_{1234} &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \\ \theta_{123} &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ \theta_{12} &= \theta_1 + \theta_2. \end{aligned} \tag{3-258}$$

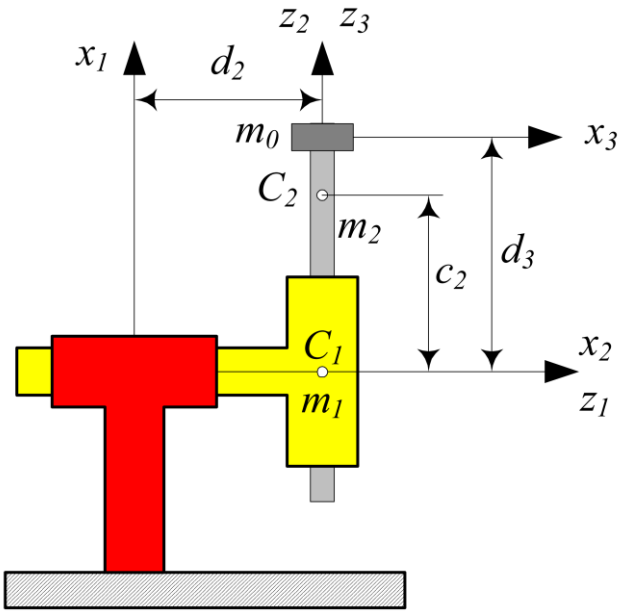
3.3.5. Bài tập

1. Ở Hình 3-27 là một cơ cấu tay quay - con trượt. Thiết lập các khung tọa độ của các khâu, phát triển phương trình chuyển động Newton-Euler và tìm ra moment dẫn động tại khớp quay cố định.



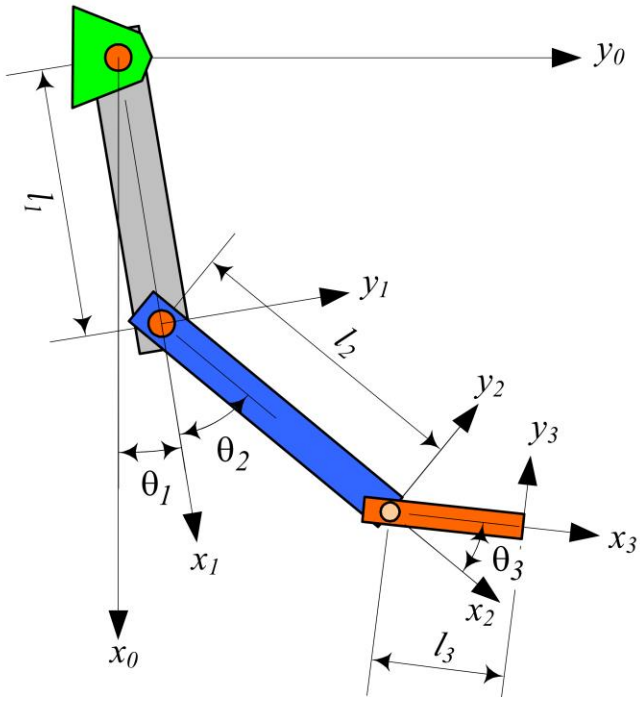
Hình 3-27 Cơ cấu tay quay - con trượt.

2. Xác định các phương trình chuyển động của cánh tay robot phẳng hệ tọa độ Descartes như được hiển thị trong Hình 3-28. Gợi ý: Các hệ tọa độ không được dựa trên quy tắc DH.



Hình 3-28 Cánh tay robot 2 bậc tự do Descartes.

3. Một tay máy phẳng 3R được thể hiện trong Hình 3-29. Tay máy được gắn vào tường và do đó, $\mathbf{g} = g^0\hat{\imath}_0$.



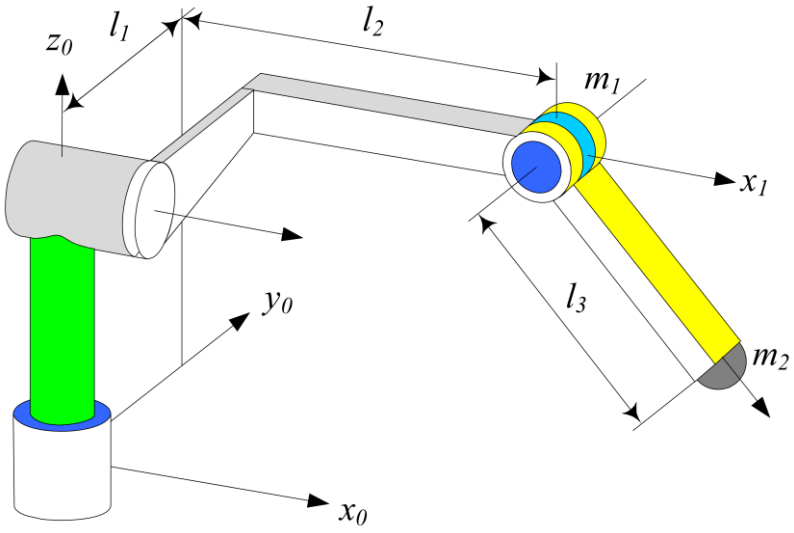
Hình 3-29 Tay máy phẳng 3R.

a. Tìm phương trình Newton-Euler của chuyển động cho tay máy. Thực hiện các tính toán trong hệ toạ độ toàn cục và suy ra lực động và moment tại mỗi khớp.

b. Giảm số phương trình xuống còn ba cho moment tại các khớp.

c. Thay thế các đại lượng vector và tính toán moment dưới dạng các biến hình học và góc của tay máy.

4. Hình 3-30 minh họa một cánh tay robot dạng khớp nối với cánh tay nhẹ và hai điểm nặng m_1 và m_2.



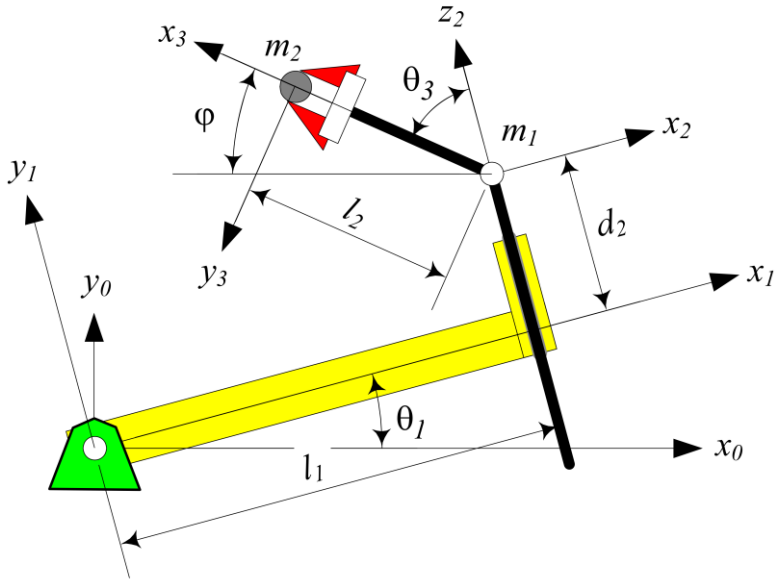
Hình 3-30 Cánh tay robot dạng khớp nối.

a. Tuân theo các quy tắc DH và hoàn thành các khung tọa độ của khâu.

b. Xác định ma trận biến đổi DH.

c. Xác định các phương trình chuyển động của tay máy bằng phương pháp Lagrange.

5. Hình 3-31 minh họa một cánh tay robot phẳng có ba bậc tự do. Xác định các phương trình chuyển động của cánh tay nếu các khâu không có khối lượng và có hai điểm khối lượng lớn là m_1 và m_2.



Hình 3-31 Cánh tay robot phẳng có ba bậc tự do.

CHƯƠNG 4. ĐIỀU KHIỂN ROBOT

Mục tiêu cần đạt được của chương 4:

- Hiểu được các kỹ thuật điều khiển robot;
- Xác định đường cong hình học chuyển động của robot;
- Lập kế hoạch đường đi của robot ;
- Xây dựng được quỹ đạo chuyển động của robot;
- Mô phỏng được quỹ đạo chuyển động của robot.

4.1. Giới thiệu

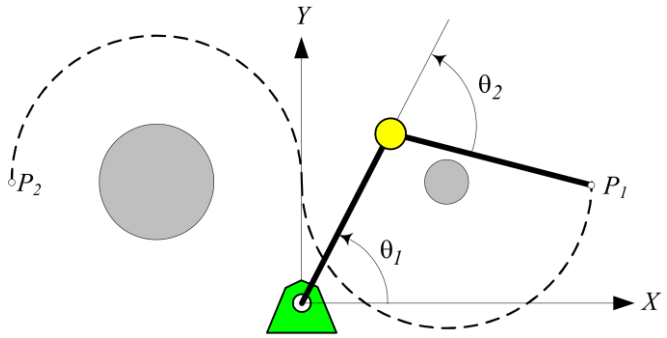
Điều khiển là khoa học về chuyển động mong muốn. Nó liên quan đến động học và động lực học của robot để tạo ra một chuyển động được định trước. Nó bao gồm các bài toán tối ưu hóa để xác định các lực sao cho hệ thống sẽ hoạt động một cách tối ưu. Một ví dụ điển hình là tình huống trong đó cấu hình ban đầu và cuối cùng của robot được cho trước và các lực tác động lên robot phải được xác định để có chuyển động trong thời gian tối thiểu.

Kế hoạch đường đi hoặc quỹ đạo là một phần của điều khiển, trong đó chúng ta lập kế hoạch cho một đường đi mà cánh tay robot sẽ theo một tập thời gian đã được lập kế hoạch trước. Các đường đi có thể được lập kế hoạch trong không gian khớp hoặc không gian Descartes. Lập kế hoạch đường đi trong không gian khớp trực tiếp xác định sự tiến triển theo thời gian của các biến khớp. Tuy nhiên, đường đi trong không gian Descartes xác định vị trí và hướng của khâu chấp hành cuối. Vì vậy, đường đi bao gồm việc đạt được một mục tiêu mong muốn từ cấu hình ban đầu. Nó có thể bao gồm tránh các chướng ngại vật. Lập kế hoạch đường đi trong không gian khớp không liên quan đến tính toán động học nghịch, nhưng rất khó để hiểu chuyển động của cánh tay robot trong không gian Descartes. Tuy nhiên, tọa độ Descartes là cần thiết nhưng cần tính toán động học nghịch [8].

Trong chương này, chúng ta phát triển các kỹ thuật để suy ra các lệnh cần thiết để điều khiển nhiệm vụ của robot.

4.2. Lập kế hoạch đường đi

Trong kỹ thuật robot, lập kế hoạch đường đi bao gồm ba nhiệm vụ: 1 - Xác định một đường cong hình học cho đầu công tác giữa hai điểm. 2 - Xác định chuyển động quay giữa hai hướng. 3 - Xác định một hàm thời gian cho sự thay đổi của một tọa độ giữa hai giá trị cho trước. Tất cả ba định nghĩa này được gọi là lập kế hoạch đường đi. Hình 4-1 minh họa đường đi của điểm đầu của một cánh tay robot 2R giữa các điểm P_1 và P_2 để tránh hai chướng ngại vật.



Hình 4-1 Đường đi đầu công tác của cánh tay robot 2R để tránh hai vật cản.

4.2.1. Đường đi bậc ba

Công thức bậc ba là đa thức đơn giản nhất để xác định ứng xử theo thời gian của một biến giữa hai giá trị cho trước, từ trạng thái nghỉ đến trạng thái nghỉ.

Một đường đi bậc ba trong không gian khớp cho biến khớp $q(t)$, hoặc trong không gian Descartes cho tọa độ Descartes $q(t)$, giữa hai điểm $q(t_0)$ và $q(t_f)$ là

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \tag{4-1}$$

Trong đó,

$$a_0 = -\frac{q_1 t_0^2 (t_0 - 3t_f) + q_0 t_f^2 (3t_0 - t_f)}{(t_f - t_0)^3} - t_0 t_f \frac{q_0' t_f + q_1' t_0}{(t_f - t_0)^2} \tag{4-2}$$

$$a_1 = 6 t_0 t_f \frac{q_0 - q_1}{(t_f - t_0)^3} + \frac{q_0' t_f (t_f^2 + t_0 t_f - 2t_0^2) + q_1' t_0 (2t_f^2 - t_0^2 - t_0 t_f)}{(t_f - t_0)^3} \tag{4-3}$$

$$a_2 = -\frac{q_0 (3t_0 + 3t_f) + q_1 (-3t_0 - 3t_f)}{(t_f - t_0)^3} - \frac{q_1' (t_0 t_f - 2t_0^2 + t_f^2) + q_0' (2t_f^2 - t_0^2 - t_0 t_f)}{(t_f - t_0)^3} \tag{4-4}$$

$$a_3 = \frac{2q_0 - 2q_1 + q_0' (t_f - t_0) + q_1' (t_f - t_0)}{(t_f - t_0)^3} \tag{4-5}$$

Và

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 \quad \dot{q}(t_0) = q_0' \\ q(t_f) &= q_f \quad \dot{q}(t_f) = q_f'. \end{aligned} \tag{4-6}$$

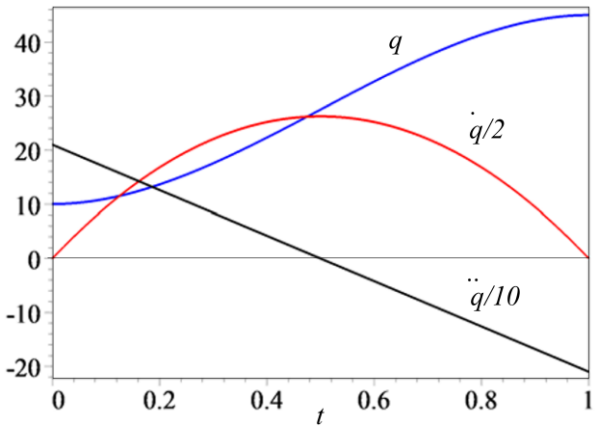
Ví dụ 4-1: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đi bậc ba từ vị trí nghỉ này đến vị trí nghỉ khác.

Giả sử $q(0) = 10$ độ, $q(1) = 45$ độ, và $\dot{q}(0) = \dot{q}(1) = 0$. Các hệ số của đường đi bậc ba là

$$a_0 = 10 \; a_1 = 0 \; a_2 = 105 \; a_3 = -70 \tag{4-7}$$

tạo ra một đường dẫn cho biến là

$$q(t) = 10 + 105t^2 - 70t^3 \text{ độ} \quad (4\text{-}8)$$



Hình 4-2 Động học của đường đi bậc ba từ vị trí nghỉ này đến vị trí nghỉ khác.

Thông tin về đường đi được hiển thị trong Hình 4-2.

Ví dụ 4-2: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đi bậc ba đến vị trí nghỉ.

Giả sử góc của một khớp bắt đầu từ $\theta(0) = 10$ độ, $\dot{\theta}(0) = 12$ độ/giây và kết thúc tại $(2) = 45$ độ, $\dot{\theta}(0) = 0$. Các hệ số của một đường đi bậc ba cho chuyển động này là:

$$a_0 = 10 \quad a_1 = 12 \quad a_2 = \frac{81}{2} \quad a_3 = \frac{-29}{2} \quad (4\text{-}9)$$

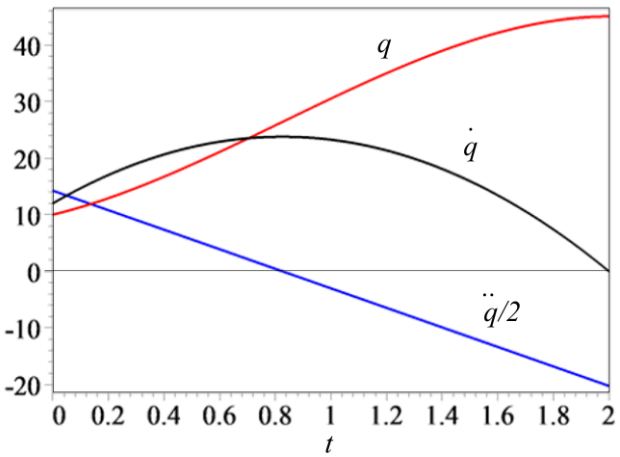
Động học học của đường đi này là

$$\theta(t) = 10 + 12t + 40.5t^2 - 14.5t^3 \text{ độ} \quad (4\text{-}10)$$

$$\dot{\theta}(t) = 81t - 43.5t^2 + 12 \text{ độ/giây} \quad (4\text{-}11)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 81 - 87t \text{ độ}/giây^2 \quad (4\text{-}12)$$

Là được thể hiện trên Hình 4-3.



Hình 4-3 Động học của đường bậc ba đến vị trí nghỉ trong không gian khớp.

Ví dụ 4-3: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đi từ vị trí nghỉ này đến vị trí nghỉ khác với vận tốc không đổi ở khoảng giữa.

Giả sử chúng ta cần một đường đi từ vị trí nghỉ này đến vị trí nghỉ khác với một vận tốc cho trước không đổi $\dot{q} = \dot{q}_c$ cho $t_1 < t < t_2$ trong đó $t_0 < t_1 < t_2 < t_f$. Chúng ta sẽ chỉ ra các điều kiện biên cần được thỏa mãn là

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 \quad \dot{q}(t_0) = q_0' \\ \dot{q}(t) &= q_c' \quad t_1 < t < t_2 \\ q(t_f) &= q_f \quad \dot{q}(t_f) = q_f'. \end{aligned} \tag{4-13}$$

Đường đi có ba phần: nghỉ đến, vận tốc không đổi và đến nghỉ. Chúng ta cần một phương trình cho phần từ nghỉ của chuyển động để đạt được vận tốc đã cho.

Một đường cong bậc hai có ba hệ số và có thể được sử dụng để thỏa mãn ba điều kiện.

$$\begin{aligned} q_1(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ \dot{q}_1(t) &= a_1 + 2a_2 t \end{aligned} \tag{4-14}$$

Các điều kiện là vị trí và vận tốc ban đầu, và vận tốc hằng số cuối cùng. Giả sử $t_0 = 0$, các điều kiện cho đường đi từ nghỉ đến là

$$q_1(0) = q_0 \; \dot{q}_1(0) = 0 \; \dot{q}_1(t_1) = q_c' \tag{4-15}$$

được tạo ra từ các phương trình sau:

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 \\ 0 &= a_1 \\ q_c' &= 2a_2 t_1. \end{aligned} \tag{4-16}$$

Vì vậy, đường đi từ vị trí nghỉ đến:

$$q_1(t) = q_0 + \frac{q_c'}{2t_1} t^2 \qquad 0 < t < t_1 \tag{4-17}$$

Với vận tốc không đổi cụ thể q_c' cho thấy rằng đường đi ở phần giữa là:

$$\begin{aligned} \dot{q}_2(t) &= q_c' \\ q_2(t) &= q_c' t + C_1 \qquad t_1 < t < t_2 \end{aligned} \tag{4-18}$$

Hằng số tích phân có thể được tìm thấy bằng cách sử dụng điều kiện vị trí tại $t = t_1$.

$$\begin{aligned} q_0 + \frac{q_c'}{2t_1} t_1^2 &= q_c' t_1 + C_1 \\ C_1 &= q_0 - \frac{1}{2} t_1 q_c' \end{aligned} \tag{4-19}$$

Có bốn điều kiện cho phần dừng của đường đi. Do đó, nó có thể được tính toán bằng cách sử dụng phương trình bậc ba.

$$\begin{aligned} q_3(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ \dot{q}_3(t) &= b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 \end{aligned} \tag{4-20}$$

và các điều kiện biên sau:

$$\begin{aligned} q_3(t_f) &= q_f \\ \dot{q}_3(t_f) &= 0 \\ q_3(t_2) &= q_2(t_2) = q_2 = q_c' t_2 + q_0 - \frac{1}{2} t_1 q_c' \\ \dot{q}(t_2) &= \dot{q}_2(t_2) = q_c' \end{aligned} \tag{4-21}$$

Những điều kiện này tạo ra ba phương trình

$$\begin{bmatrix} 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 0 & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_f \\ 0 \\ q_c' t_2 + q_0 - \frac{1}{2} t_1 q_c' \\ q_c' \end{bmatrix} \tag{4-22}$$

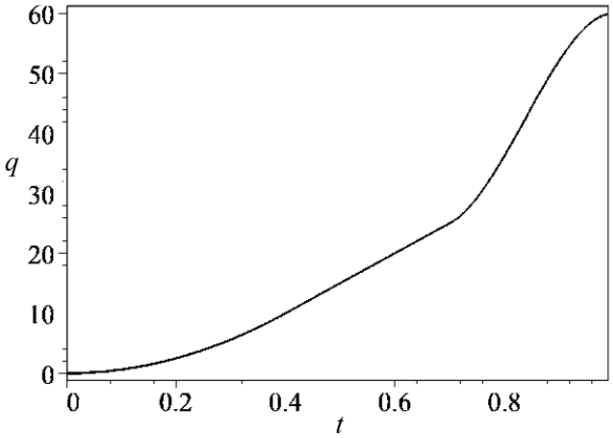
với các giải pháp sau:

$$\begin{aligned} b_0 &= -t_2 t_f^2 \frac{q_c'}{-2t_2 t_f + t_2^2 + t_f^2} + q_2 \frac{t_f^3 - 3t_2 t_f^2}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \\ &+ q_f \frac{-t_2^3 + 3t_2^2 t_f}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \\ b_1 &= q_c' \frac{2t_2 t_f + t_f^2}{-2t_2 t_f + t_2^2 + t_f^2} + 6q_2 t_2 \frac{t_f}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \\ &- 6t_2 q_f \frac{t_f}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \\ b_2 &= q_c' \frac{-t_2 - 2t_f}{-2t_2 t_f + t_2^2 + t_f^2} + q_2 \frac{-3t_2 - 3t_f}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \\ &+ q_f \frac{3t_2 + 3t_f}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \\ b_3 &= \frac{q_c'}{-2t_2 t_f + t_2^2 + t_f^2} + 2 \frac{q_2}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \\ &- 2 \frac{q_f}{-t_2^3 + t_f^3 - 3t_2 t_f^2 + 3t_2^2 t_f} \end{aligned} \tag{4-23}$$

Với

$$t_2 < t < t_f \tag{4-24}$$

Đồ thị của đường đi cho các giá trị sau được minh họa trong Hình 4-4.



Hình 4-4 Đường đi từng đoạn từ điểm dừng đến điểm dừng với vận tốc không đổi ở giữa.

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.4\ giây \quad t_2 = 0.7\ giây \quad t_f = 1\ giây \\ q_0 &= 0 \qquad\qquad q_f = 60\ \text{độ} \quad q_c' = 50\ \text{độ}/giây \end{aligned} \tag{4-25}$$

Ví dụ 4-4: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường cong bậc hai qua ba điểm.

Một đường cong bậc hai đi qua ba điểm $(q_1, t_1), (q_2, t_2)$ và (q_3, t_3) là:

$$\begin{aligned} q(t) = \ & \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}q_1 + \frac{(t-t_3)(t-t_1)}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)}q_2 \\ & + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_1)}q_3 \end{aligned} \tag{4-26}$$

Ví dụ, đoạn đường đi qua (10 độ, 0), (25 độ, 0.5), và (45 độ, 1) là:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{(t-0.5)(t-1)}{-0.5(-1)}10 + \frac{(t-1)t}{(-0.5)(0.5)}25 + \frac{t(t-0.5)}{1}45 \\ &= -\frac{5}{2}(14.0t^2 - 19.0t - 4.0) \end{aligned} \tag{4-27}$$

Vận tốc của đường đi ở cả hai đầu là:

$$\begin{aligned} \dot{q}(0) &= 47.5\ \text{độ}/giây \\ \dot{q}(1) &= -22.5\ \text{độ}/giây \end{aligned} \tag{4-28}$$

4.2.2. Đường đa thức

Điều kiện cần thiết xác định độ của đa thức cho $q = q(t)$. Nói chung, một đường đa thức của bậc n,

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \tag{4-29}$$

Cần $n + 1$ điều kiện. Các điều kiện có thể thuộc hai loại: vị trí tại một chuỗi điểm, sao cho đường đi sẽ đi qua tất cả các điểm được xác định; hoặc vị trí, vận tốc, gia tốc và độ không mượt tại hai điểm, sao cho độ mượt của đường đi có thể được điều khiển.

Việc tìm hệ số của một đa thức được giảm thành một tập hợp các phương trình đại số tuyến tính và có thể được giải số. Tuy nhiên, lập kế hoạch đường đi có thể được đơn giản hóa bằng cách chia đường đi toàn bộ thành một loạt các đoạn và sử dụng sự kết hợp của các đa thức

bậc thấp hơn cho các đoạn khác nhau của đường đi. Các đa thức sau đó phải được ghép lại để đáp ứng tất cả các điều kiện biên cần thiết.

Ví dụ 4-5: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đa thức bậc năm.

Dùng một biến để có vị trí, vận tốc và gia tốc cụ thể tại các biên cục bộ đặt ra sáu điều kiện:

$$\begin{matrix} q(t_0) = q_0 & \dot{q}(t_0) = q_0' & \ddot{q}(t_0) = q_0'' \\ q(t_f) = q_f & \dot{q}(t_f) = q_f' & \ddot{q}(t_f) = q_f'' \end{matrix} \tag{4-30}$$

Một đa thức bậc năm có thể thỏa mãn các điều kiện này.

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \tag{4-31}$$

và tạo ra một bộ sáu phương trình:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_0' \\ q_0'' \\ q_f \\ q_f' \\ q_f'' \end{bmatrix} \tag{4-32}$$

Một đường đi từ vị trí nghỉ đến vị trí nghỉ mà không có gia tốc tại các vị trí nghỉ với các điều kiện sau:

$$\begin{matrix} q(0) = 10\ độ & \dot{q}(0) = 0 & \ddot{q}(0) = 0 \\ q(1) = 45\ độ & \dot{q}(1) = 0 & \ddot{q}(1) = 0 \end{matrix} \tag{4-33}$$

Có thể tìm bằng cách giải một tập hợp các phương trình để tìm các hệ số của đa thức.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-34}$$

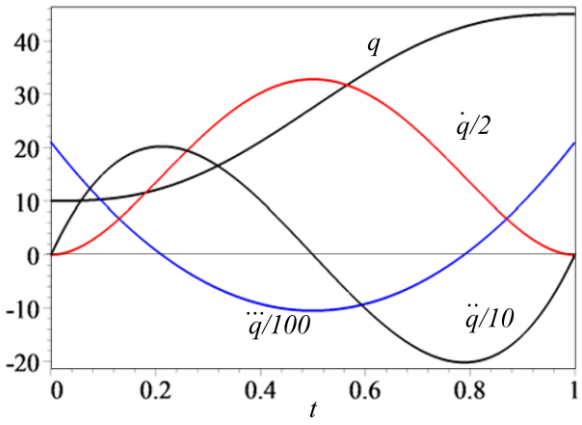
Mà ta có

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 350 \\ -525 \\ 210 \end{bmatrix} \tag{4-35}$$

Phương trình đường đi là:

$$q(t) = 10 + 350t^3 - 525t^4 + 210t^5. \tag{4-36}$$

được hiển thị trong Hình 4-5.



Hình 4-5 Một đường đi từ vị trí nghỉ đến vị trí nghỉ dạng bậc năm.

Ví dụ 4-6: Cho cánh tay robot 2R. Xác định giá trị gia tốc (jerk) bằng không tại một đường đi bắt đầu và dừng lại.

Để tạo một đường đi bắt đầu và dừng với sự thay đổi gia tốc bằng không, một đa thức bậc bảy là:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7 \qquad (4\text{-}37)$$

và phải sử dụng tám điều kiện biên

$$\begin{array}{llll} q(0) = q_0 & \dot{q}(0) = 0 & \ddot{q}(0) = 0 & \dddot{q}(0) = 0 \\ q(1) = q_f & \dot{q}(1) = 0 & \ddot{q}(1) = 0 & \dddot{q}(1) = 0 \end{array} \qquad (4\text{-}38)$$

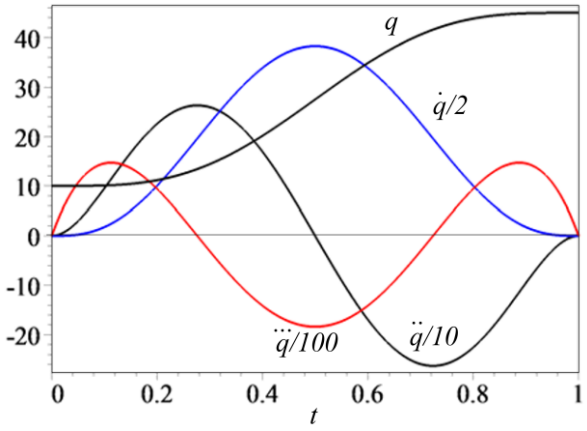
Một đường đi có gia tốc giật bằng không từ điểm bắt đầu đến điểm dừng với $q(0) = 10$ độ và $q(1) = 45$ độ, có thể được tìm thấy bằng cách giải hệ phương trình sau cho các hệ số chưa biết $a_0, a_1, \cdots, a_7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 & 60 & 120 & 210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}39)$$

Ta có

$$q(t) = 10 + 1225t^4 - 2940t^5 + 2450t^6 - 700t^7. \qquad (4\text{-}40)$$

Đồ thị của đường đi này được minh họa trong Hình 4-6. Hình 4-2 mô tả đường đi của một chuyển động từ trạng thái nghỉ đến trạng thái nghỉ mà không có điều kiện về gia tốc và độ giật. Hình 4-5 cho thấy một sự cải tiến bằng cách buộc chuyển động phải có gia tốc bằng không ở điểm bắt đầu và kết thúc. Trong Hình 4-6, chuyển động được buộc phải có gia tốc và độ giật bằng không ở điểm bắt đầu và kết thúc. Do đó, nó cho thấy sự bắt đầu và dừng mượt mà nhất. Tuy nhiên, tăng độ mượt của bắt đầu và dừng lại sẽ làm tăng giá trị đỉnh của gia tốc.



Hình 4-6 Độ giật bằng không tại điểm bắt đầu và dừng.

Ví dụ 4-7: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đi với gia tốc không đổi.

Một đường đi có gia tốc không đổi bao gồm hai đoạn có gia tốc dương và gia tốc âm. Giả sử giá trị tuyệt đối của gia tốc dương và gia tốc âm được cho trước.

$$|\ddot{q}(t_0)| = a_c \tag{4-41}$$

Nửa đầu của chuyển động có gia tốc dương, cần một đa thức bậc hai.

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t_0) &= a_c t \\ q_1(t_0) &= \frac{1}{2} a_c t^2 + q_0 \end{aligned} \tag{4-42}$$

Với

$$0 < t < \frac{1}{2} t_f \tag{4-43}$$

Các hằng số tích phân được tìm dựa trên các điều kiện ban đầu.

$$q_1(0) = q_0 \qquad \dot{q}_1(0) = 0 \tag{4-44}$$

Đối với nửa sau của đường đi, chúng ta có thể bắt đầu với một đa thức bậc hai.

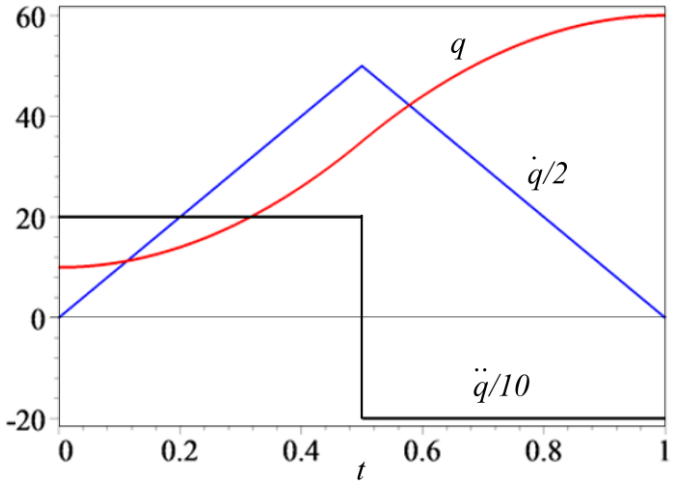
$$q_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \qquad \frac{1}{2} t_f < t < t_f \tag{4-45}$$

Và áp đặt các điều kiện biên sau đây:

$$\begin{aligned} q_2(t_f) &= q_f \\ \dot{q}_2(t_f) &= 0 \\ q_1\left(\frac{t_f}{2}\right) &= q_2\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{1}{8} a_c t_f^2 + q_0 \end{aligned} \tag{4-46}$$

Các điều kiện này tạo ra ba phương trình cho các hệ số không xác định.

$$\begin{bmatrix} 1 & t_f & t_f^2 \\ 0 & 1 & 2t_f \\ 0 & 1 & t_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_f \\ 0 \\ \frac{1}{8} a_c t_f^2 + q_0 \end{bmatrix} \tag{4-47}$$



Hình 4-7 Đường đi gia tốc không đổi.

với giải pháp sau đây:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_f - t_f\left(q_0 + \frac{1}{8}a_c t_f^2\right) \\ 2q_0 + \frac{1}{4}a_c t_f^2 \\ -\frac{1}{t_f}\left(q_0 + \frac{1}{8}a_c t_f^2\right) \end{bmatrix} \tag{4-48}$$

Một đường đi gia tốc không đổi được thể hiện trong Hình 4-7 cho các điều kiện $q_0 = 10$ độ, $q_f = 45$ độ, $t_f = 1$ và $a_c = 200$ độ/$giây^2$.

Ví dụ 4-8: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đi theo trình tự các điểm.

Một đường đi có thể được gán qua một chuỗi các điểm mà biến phải đạt được vào những thời điểm cụ thể. Các điểm này cũng có thể được xác định để xấp xỉ một quỹ đạo. Xem xét một ví dụ về đường đi được xác định bởi bốn điểm q_0, q_1, q_2 và q_3, sao cho các điểm này được đạt tới tại các thời điểm t_0, t_1, t_2, và t_3 tương ứng. Ngoài vị trí, chúng ta thường áp đặt các ràng buộc về vận tốc và gia tốc ban đầu và cuối cùng. Các điều kiện cho một chuỗi các điểm như vậy có thể là

$$\begin{aligned} &q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \quad \ddot{q}(t_0) = 0 \\ &q(t_1) = q_1 \\ &q(t_2) = q_2 \\ &q(t_3) = q_3 \quad \dot{q}(t_3) = 0 \quad \ddot{q}(t_3) = 0. \end{aligned} \tag{4-49}$$

Ta có thể sử dụng đa thức bậc bảy để thỏa mãn tám điều kiện này.

$$\begin{aligned} q(t) = \quad & a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \\ & + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7 \end{aligned} \tag{4-50}$$

Tập hợp các phương trình cho các hệ số chưa biết là

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 & t_0^6 & t_0^7 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 & 6t_0^5 & 7t_0^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 & 30t_0^4 & 42t_0^5 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^4 & t_1^5 & t_1^6 & t_1^7 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^4 & t_2^5 & t_2^6 & t_2^7 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & t_3^4 & t_3^5 & t_3^6 & t_3^7 \\ 0 & 1 & 2t_3 & 3t_3^2 & 4t_3^3 & 5t_3^4 & 6t_3^5 & 7t_3^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_3 & 12t_3^2 & 20t_3^3 & 30t_3^4 & 42t_3^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}51)$$

có thể được đơn giản hóa thành

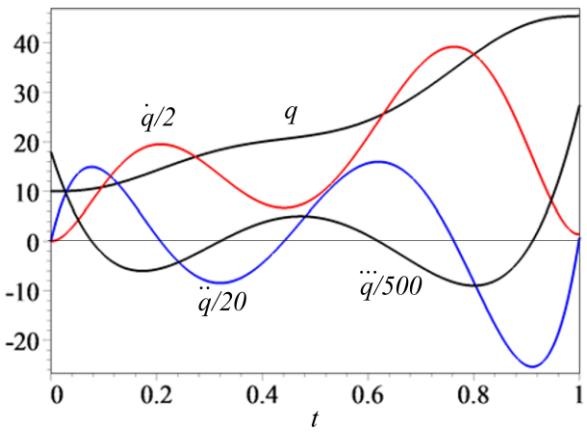
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.4 & 0.4^2 & 0.4^3 & 0.4^4 & 0.4^5 & 0.4^6 & 0.4^7 \\ 1 & 0.7 & 0.7^2 & 0.7^3 & 0.7^4 & 0.7^5 & 0.7^6 & 0.7^7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 30 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}52)$$

cho dữ liệu ví dụ sau đây

$$\begin{aligned} q(0) &= 10 \text{ độ} \quad \dot{q}(0) = 0 \quad \ddot{q}(0) = 0 \\ q(0.4) &= 20 \text{ độ} \\ q(0.7) &= 30 \text{ độ} \\ q(1) &= 45 \text{ độ} \quad \dot{q}(1) = 0 \quad \ddot{q}(1) = 0 \end{aligned} \quad (4\text{-}53)$$

Dữ liệu cho các hệ số là:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 1500.5 \\ -7053 \\ 12891 \\ -10380 \\ 3076.9 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}54)$$



Hình 4-8 Đường đi theo trình tự các điểm.

Những hệ số này tạo ra một đường đi như được hiển thị trong Hình 4-8. Phương pháp này cung cấp một hàm liên tục và khả vi cho biến q. Tính liên tục và khả vi của $q = q(t)$ là một ưu điểm mang lại vận tốc, gia tốc và độ giật. Tuy nhiên, số lượng phương trình tăng lên khi số điểm tăng, điều này cần dung lượng lưu trữ dữ liệu lớn hơn và tăng thời gian tính toán.

Ví dụ 4-9: Cho cánh tay robot 2R. Chia một đường đi thành một loạt các đoạn.

Thay vì sử dụng một đa thức bậc cao duy nhất cho toàn bộ quỹ đạo, chúng ta có thể chia quỹ đạo thành một số đoạn và sử dụng một chuỗi các đa thức bậc thấp. Xem xét một đường đi cho các điều kiện biên sau đây:

$$\begin{array}{lll} q(t_0) = q_0 & \dot{q}(t_0) = 0 & \ddot{q}(t_0) = 0 \\ q(t_4) = q_3 & \dot{q}(t_4) = 0 & \ddot{q}(t_4) = 0 \end{array} \tag{4-55}$$

mà cũng phải đi qua ba điểm giữa được cung cấp dưới đây.

$$\begin{array}{l} q(t_1) = q_1 \\ q(t_2) = q_2 \\ q(t_3) = q_3 \end{array} \tag{4-56}$$

chia toàn bộ đường đi thành bốn đoạn, tên là $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ và $q_4(t)$.

$$\begin{array}{llll} q_1(t) & với & q(t_0) < q_1(t) < q(t_1) & và \quad t_0 < t < t_1 \\ q_2(t) & với & q(t_1) < q_2(t) < q(t_2) & và \quad t_1 < t < t_2 \\ q_3(t) & với & q(t_2) < q_3(t) < q(t_3) & và \quad t_2 < t < t_3 \\ q_4(t) & với & q(t_3) < q_4(t) < q(t_4) & và \quad t_3 < t < t_4 \end{array} \tag{4-57}$$

Điều kiện biên cho đoạn đầu tiên là

$$\begin{array}{l} q_1(t_0) = q_0 \; \dot{q}_1(t_0) = 0 \; \ddot{q}_1(t_0) = 0 \\ q_1(t_1) = q_1 \end{array} \tag{4-58}$$

Có thể được thỏa mãn bằng một hàm lập phương.

$$q_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 \tag{4-59}$$

Những hệ số có thể được tính bằng cách giải một tập hợp các phương trình

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & (t_1 - t_0) & (t_1 - t_0)^2 & (t_1 - t_0)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \tag{4-60}$$

Từ đó ta có

$$a_0 = q_0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{q_1 - q_0}{(t_1 - t_0)^3}. \tag{4-61}$$

Đoạn đường trong phân đoạn thứ hai phải thỏa mãn các điều kiện biên sau đây:

$$\begin{aligned} q_2(t_1) &= q_1 \\ \dot{q}_2(t_1) &= \dot{q}_1(t_1) = a_1 + 2a_2(t_1 - t_0)^2 + 3a_3(t_1 - t_0)^2 \\ &= q_0 + 3\frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} \\ q_2(t_2) &= q_2 \end{aligned} \tag{4-62}$$

Một đa thức bậc hai sẽ thỏa mãn những điều kiện sau đây:

$$q_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \tag{4-63}$$

Các hệ số là các giải pháp của

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 0 & 1 & 2t_1 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_0 + 3\dfrac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{4-64}$$

Mà ta có

$$\begin{aligned} b_0 = \; & q_2 \frac{t_1^2}{-2t_1t_2 + t_1^2 + t_2^2} + q_1 \frac{-2t_1t_2 + t_2^2}{-2t_1t_2 + t_1^2 + t_2^2} \\ & -t_1 \frac{t_2}{-t_1 + t_2}\left(q_0 + 3\frac{-q_0 + q_1}{-t_0 + t_1}\right) \\ b_1 = \; & 2q_1 \frac{t_1}{-2t_1t_2 + t_1^2 + t_2^2} - 2q_2 \frac{t_1}{-2t_1t_2 + t_1^2 + t_2^2} \\ & + \frac{t_1 + t_2}{-t_1 + t_2}\left(q_0 + 3\frac{-q_0 + q_1}{-t_0 + t_1}\right) \\ b_2 = \; & -\frac{q_1}{-2t_1t_2 + t_1^2 + t_2^2} + \frac{q_2}{-2t_1t_2 + t_1^2 + t_2^2} \\ & -\frac{1}{-t_1 + t_2}\left(q_0 + 3\frac{-q_0 + q_1}{-t_0 + t_1}\right). \end{aligned} \tag{4-65}$$

Điều kiện biên trong đoạn thứ ba là:

$$\begin{aligned} q_3(t_2) &= q_2 \\ q_3(t_3) &= q_3 \end{aligned} \qquad \dot{q}_3(t_2) = \dot{q}_2(t_2) = b_1 + 2b_2t_2 \tag{4-66}$$

Chúng ta có thể thoả mãn các điều kiện này bằng một phương trình bậc hai.

$$q_3(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \tag{4-67}$$

ba phương trình cho các hệ số chưa biết là:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_2 & t_2^2 \\ 0 & 1 & 2t_2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ b_1 + 2b_2t_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4-68}$$

Các hệ số là:

$$\begin{aligned} c_0 = \quad & -t_2\frac{t_3}{-t_2+t_3}(b_1+2b_2t_2)+q_3\frac{t_2^2}{-2t_2t_3+t_2^2+t_3^2} \\ & +q_2\frac{-2t_2t_3+t_3^2}{-2t_2t_3+t_2^2+t_3^2} \end{aligned} \tag{4-69}$$

$$\begin{aligned} c_1 = \quad & \frac{t_2+t_3}{-t_2+t_3}(b_1+2b_2t_2)+2q_2\frac{t_2}{-2t_2t_3+t_2^2+t_3^2} \\ & -2q_3\frac{t_2}{-2t_2t_3+t_2^2+t_3^2} \\ & +\frac{q_3}{-2t_2t_3+t_2^2+t_3^2}. \end{aligned} \tag{4-70}$$

$$\begin{aligned} c_2 = \quad & -\frac{1}{-t_2+t_3}(b_1+2b_2t_2)-\frac{q_2}{-2t_2t_3+t_2^2+t_3^2} \\ & +\frac{q_3}{-2t_2t_3+t_2^2+t_3^2}. \end{aligned} \tag{4-71}$$

Điều kiện biên cho đoạn thứ tư là:

$$\begin{array}{llll} q_4(t_3)=q_3 & & \dot{q}_4(t_3)=\dot{q}_3(t_3)=c_1+2c_2t_3 & \\ q_4(t_4)=q_4 & \dot{q}_4(t_4)=0 & \ddot{q}_4(t_4)=0 & \end{array} \tag{4-72}$$

Cần một đa thức bậc bốn để thỏa mãn điều kiện đó.

$$q_4(t)=d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3+d_4t^4 \tag{4-73}$$

Thay thế các điều kiện biên tạo ra một bộ bốn phương trình cho hệ số.

$$\begin{bmatrix} 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & t_3^4 \\ 0 & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 & 4t_2^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 & t_4^4 \\ 0 & 1 & 2t_4 & 3t_4^2 & 4t_4^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_4 & 12t_4^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_3 \\ c_1+2c_2t_3 \\ q_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-74}$$

Ví dụ, một tập hợp các điều kiện được cho là

$$\begin{array}{lllll} t_0=0 & t_1= & 0.4 & t_2=0.7 \quad t_3=0.9 & t_4=1 \\ & q(0) & =10 \text{ độ} & \dot{q}(0)=0 & \ddot{q}(0)=0 \\ & q(0.4) & =20 \text{ độ} & & \\ & q(0.7) & =30 \text{ độ} & & \\ & q(0.9) & =35 \text{ độ} & & \\ & q(1) & =45 \text{ độ} & \dot{q}_i(1)=0 & \ddot{q}(1)=0 \end{array} \tag{4-75}$$

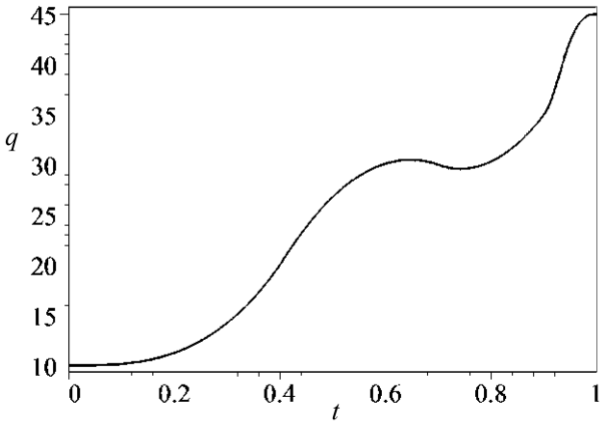
Ta có

$$\begin{aligned} q_1(t) = \quad & 10+156.25t^3 \\ q_2(t) = \quad & -41.56+222.78t-172.2t^2 \\ q_3(t) = \quad & 148.99-321.67t+216.67t^2 \\ q_4(t) = \quad & 198545-827166.6672t \\ & +1290500t^2-893500t^3+231666.67t^4 \end{aligned} \tag{4-76}$$

Trong Hình 4-9 được thể hiện dưới dạng đồ thị. Nhược điểm của phương pháp đoạn là thiếu độ mượt của đường đi tổng thể và có gia tốc không liên tục. Để tăng độ mượt của đường đi, chúng ta cần sử dụng đa thức bậc cao hơn và đặt ràng buộc về gia tốc và có thể là gia tốc biến đổi. Các phương trình (4-76) cho thấy rằng:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t_1) &= 375\ \ddot{q}_2(t_1) = -344.4 \\ \ddot{q}_2(t_2) &= -344.4\ \ddot{q}_3(t_2) = 433.34 \\ \ddot{q}_3(t_3) &= 433.34\ \ddot{q}_4(t_3) = 7900 \\ \ddot{q}_1(t_1) \neq \ddot{q}_2(t_1) \quad & \ddot{q}_2(t_2) \neq \ddot{q}_3(t_2) \quad \ddot{q}_3(t_3) \neq \ddot{q}_4(t_3) \end{aligned} \tag{4-77}$$

Do đó, gia tốc của đường đi không liên tục tại các điểm kết nối và có một bước nhảy hữu hạn. Một bước nhảy trong gia tốc tạo ra một gia tốc không xác định. Việc có gia tốc liên tục là yêu cầu tối thiểu cho độ mượt của một đường đi. Một đường đi phân mảnh với gia tốc liên tục được gọi là spline.



Hình 4-9 Chia đường đi thành các đoạn.

4.2.3. Lập kế hoạch đường đi phi đa thức

Một đường đi của chuyển động trong không gian khớp hoặc tọa độ Descartes có thể được xác định dựa trên các hàm toán học khác nhau. Hàm sóng (Harmonic) và hàm *cycloid* là những đường đi phổ biến nhất.

$$\begin{aligned} q(t) &= a_0 + a_1 cos a_2 t + a_3 sin a_2 t \\ q(t) &= a_0 + a_1 t - a_2 sin a_3 t \end{aligned} \tag{4-78}$$

Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng các phương pháp xấp xỉ hàm số khác như Fourier,

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n cos(nx) + B_n sin(nx)] \\ A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q(t)dt \\ A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q(t)cos(nx)dt \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q(t)sin(nx)dt \end{aligned} \tag{4-79}$$

Với đa thức Legendre là:

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \sum_{i=0}^{n} L_i(t) q(t_i) \\ L_i(t) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \qquad i = 0,1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{4-80}$$

Với đa thức Chebyshev là:

$$\begin{aligned} q_{n+1}(t) &= 2tq_n(t) - q_{n-1}(t) \\ q_0(t) &= 1 \qquad q_1(t) = t \end{aligned} \tag{4-81}$$

Ví dụ 4-10: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đi theo hàm Harmonic.

Xem xét một đường đi dao động giữa hai điểm $q(t_0)$ và $q(t_f)$

$$q(t) = a_0 + a_1 cos a_2 t + a_3 sin a_2 t \tag{4-82}$$

với các điều kiện biên từ trạng thái nghỉ đến trạng thái nghỉ.

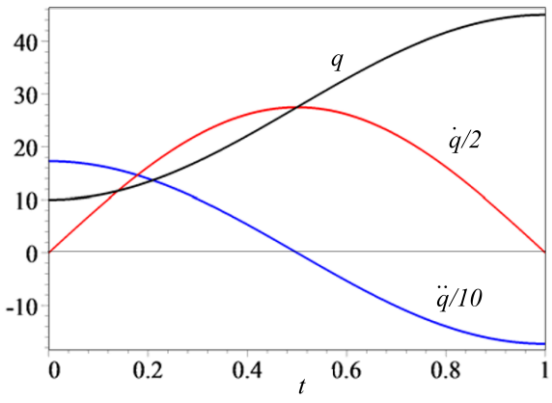
$$\begin{aligned} q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \\ q(t_f) = q_f \quad \dot{q}(t_f) = 0 \end{aligned} \tag{4-83}$$

Áp dụng các điều kiện cho phương trình theo hàm Harmonic (4-82) sẽ cung cấp giải pháp sau:

$$q(t) = \frac{1}{2}\left(q_f + q_0 - (q_f - q_0) cos \frac{\pi(t - t_0)}{t_f - t_0}\right). \tag{4-84}$$

Đồ thị của lời giải được miêu tả trong Hình 4-10 với các giá trị số liệu sau:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \qquad t_f = 1 \\ q_0 &= 10 \text{ độ} \qquad q_0' = 0 \\ q_f &= 45 \text{ độ} \qquad q_f' = 0. \end{aligned} \tag{4-85}$$



Hình 4-10 Đường đi theo hàm Harmonic.

Ví dụ 4-11: Cho cánh tay robot 2R. Xác định đường đi theo hàm cycloid.

Đường đi cycloid giữa hai điểm $q(t_0)$ và $q(t_f)$ với điều kiện biên từ trạng thái nghỉ đến trạng thái nghỉ.

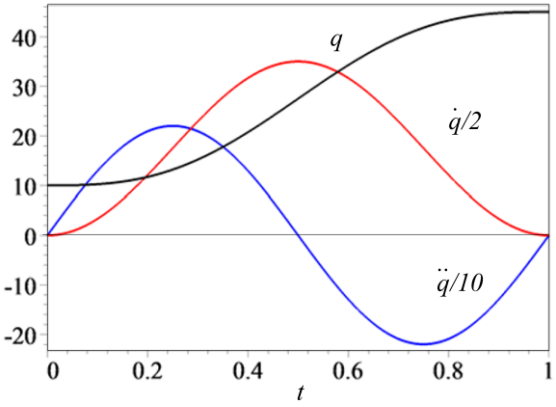
$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \\ q(t_f) &= q_f \quad \dot{q}(t_f) = 0 \end{aligned} \tag{4-86}$$

Là:

$$q(t) = q_0 + \frac{q_f - q_0}{\pi}\left(\frac{\pi(t - t_0)}{t_f - t_0} - \frac{1}{2} sin \frac{2\pi(t - t_0)}{t_f - t_0}\right) \tag{4-87}$$

Biểu đồ của đường cycloid được minh họa trong Hình 4-11 với các giá trị số sau:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \qquad t_f = 1 \\ q_0 &= 10 \text{ độ} \quad q_0' = 0 \\ q_f &= 45 \text{ độ} \quad q_f' = 0. \end{aligned} \tag{4-88}$$



Hình 4-11 Đường đi theo hàm cycloid.

So sánh Hình 4-11 với Hình 4-5 cho thấy rằng các đặc điểm động học chính của một quỹ đạo dạng chu trình tương tự như quỹ đạo từ trạng thái nghỉ đến trạng thái nghỉ dạng bậc năm.

4.2.4. Chuyển động của cánh tay robot thông qua đường dẫn khớp

Các biến khớp là các hàm của thời gian và sử dụng động học thuận để tính toán đường đi của cánh tay robot. Điều này cho phép chúng ta tính toán đường đi của khâu chấp hành cuối.

Ví dụ 4-12: Chuyển động của cánh tay robot 2R dựa trên đường đi của các khớp.

Giả sử chúng ta đã tính toán được các đường đi của hai khớp của một cánh tay robot phẳng 2R theo hàm bậc ba, và chúng là:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= 10 + 105t^2 - 70t^3 \text{ độ} \\ \theta_2(t) &= 10 + 350t^3 - 525t^4 + 210t^5 \text{ độ} \end{aligned} \tag{4-89}$$

Các đường đi của các khớp đáp ứng các điều kiện sau:

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= 10 \text{ độ} & \dot{\theta}_1(0) &= 0 \\ \theta_1(1) &= 45 \text{ độ} & \dot{\theta}_1(1) &= 0 \\ \\ \theta_2(0) &= 10 \text{ độ} \quad \dot{\theta}_2(0) = 0 & \ddot{\theta}_2(0) &= 0 \\ \theta_2(1) &= 45 \text{ độ} \quad \dot{\theta}_2(1) = 0 & \ddot{\theta}_2(1) &= 0 \end{aligned} \tag{4-90}$$

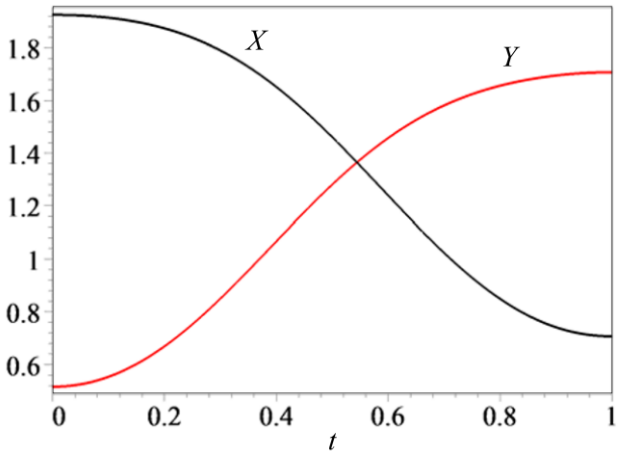
Động học thuận của một cánh tay robot 2R được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
{}^0T_2 &= {}^0T_1\,{}^1T_2 \\
&= \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-91}
$$

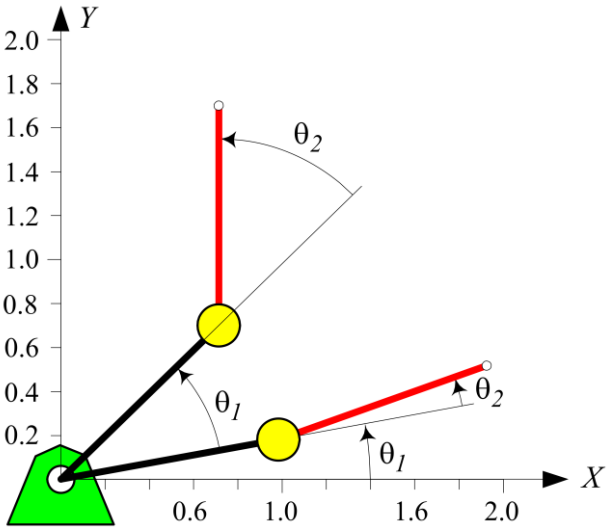
Cột thứ tư của ${}^0T_2$ cho biết vị trí Descartes của điểm đầu cuối của cánh tay robot trong hệ tọa độ cơ sở. Do đó, các thành phần X và Y của điểm đầu cuối là:

$$
\begin{aligned}
X &= l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1+\theta_2) \\
Y &= l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned} \tag{4-92}
$$

Thay thế θ_1 và θ_2 từ (4-89) cung cấp sự biến thiên theo thời gian của vị trí điểm đầu công tác. Những thay đổi này, cho $l_1 = l_2 = 1$ m được thể hiện trong Hình 4-12, trong khi các cấu hình của cánh tay robot tại các vị trí ban đầu và cuối cùng được thể hiện trong Hình 4-13.



Hình 4-12 Thành phần X và Y của vị trí điểm đầu công tác của một cánh tay robot phẳng 2R.



Hình 4-13 Cấu hình của cánh tay robot phẳng 2R tại các vị trí ban đầu và cuối cùng.

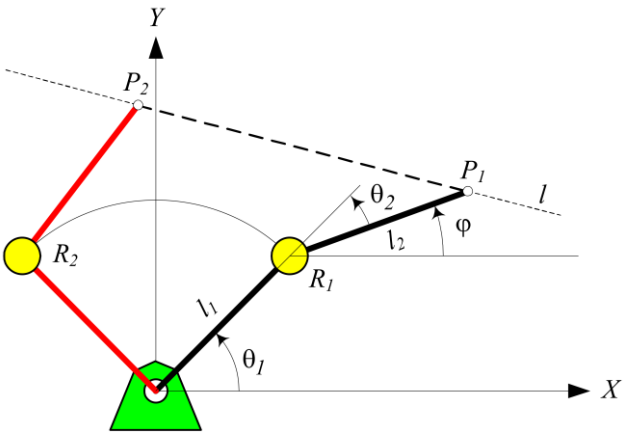
Ví dụ 4-13: Robot 2R di chuyển dọc theo một đường thẳng.

Xem xét một robot 2R với

$$l_1 = l_2 = 0.25 \tag{4-93}$$

đầu công tác của robot được cho là di chuyển trên một đường cho trước $Y = f(X)$ như được hiển thị trong Hình 4-14.

$$Y = -0.25998X + 0.3705 \tag{4-94}$$



Hình 4-14 Robot 2R di chuyển dọc theo một đường thẳng.

Giả sử rằng góc đầu tiên di chuyển giữa 45 độ và 135 độ trong 10 giây.

$$45 \text{ độ} < \theta_1 < 135 \text{ độ} \tag{4-95}$$

dựa trên quỹ đạo bậc ba.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{200}t^2 - \frac{\pi}{1000}t^3 \qquad 0 < t < 10 \; giây \tag{4-96}$$

Khớp khuỷu tay R sẽ di chuyển trên một vòng tròn và ban đầu nằm ở:

$$\begin{aligned} X_{R_1} &= 0.25cos\frac{\pi}{4} = 0.17678 \\ Y_{R_1} &= 0.25sin\frac{\pi}{4} = 0.17678 \end{aligned} \tag{4-97}$$

Điểm P_1 phải nằm trên đường thẳng (4-94) ở khoảng cách $d = 0.25$ từ R_1.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(X - 0.17678)^2 + (Y - 0.17678)^2} \\ &= \sqrt{(X - 0.17678)^2 + (-0.25998X + 0.3705 - 0.17678)^2} \\ &= 0.25 \end{aligned} \tag{4-98}$$

Do đó, P_1 ở vị trí:

$$X_{P_1} = 0.41122 \qquad Y_{P_1} = 0.26359 \tag{4-99}$$

và các giá trị ban đầu của các góc φ và θ_2 là:

$$\begin{aligned} \varphi &= arctan\frac{Y_{P_1} - Y_{R_1}}{X_{P_1} - X_{R_1}} = arctan\frac{0.26359 - 0.17678}{0.41122 - 0.17678} \\ &= 0.35463 \, rad \approx 20.319 \text{ độ} \end{aligned} \tag{4-100}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 - \varphi = \frac{\pi}{4} - 0.35463 \\ &= 0.43077 \, rad \approx 24.681 \text{ độ} \end{aligned} \tag{4-101}$$

Khớp khuỷu tay R ở vị trí cuối cùng là:

$$X_{R_2} = 0.25cos\frac{3\pi}{4} = -0.17678 \tag{4-102}$$

$$Y_{R_2} = 0.25sin\frac{3\pi}{4} = 0.17678 \tag{4-103}$$

Điểm P_2 phải nằm trên đường thẳng (4-94) ở khoảng cách $d = 0.25$ từ R_2.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(X + 0.17678)^2 + (Y - 0.17678)^2} \\ &= \sqrt{(X + 0.17678)^2 + (-0.25998X + 0.3705 - 0.17678)^2} \\ &= 0.25 \end{aligned} \tag{4-104}$$

Do đó, P_2 ở vị trí:

$$X_{P_2} = -2.8188 \times 10^{-2} \qquad Y_{P_2} = 0.37783 \tag{4-105}$$

và các giá trị cuối cùng của góc φ và θ_2 là:

$$\begin{aligned} &\varphi = arctan\frac{Y_{P_2} - Y_{R_2}}{X_{P_2} - X_{R_2}} = arctan\frac{0.37783 - 0.17678}{-2.8188 \times 10^{-2} + 0.17678} \\ &= 0.93432rad \approx 53.533 \text{ độ} \\ &\theta_2 = \theta_1 - \varphi = \frac{3\pi}{4} - 0.93432 \\ &= 1.4219\, rad \approx 81.469 \text{ độ} \end{aligned} \tag{4-106}$$

Để xác định θ_2 trong quá trình chuyển động, chúng ta nên tuân theo cùng một quy trình. Tìm vị trí của khớp khuỷu tay R dưới dạng một hàm của θ_1.

$$X_R = 0.25cos\theta_1 \qquad Y_R = 0.25sin\theta_1 \tag{4-107}$$

Điểm đầu P phải nằm trên đường thẳng (4-94) ở khoảng cách $d = 0.25$ từ khớp khuỷu của robot R.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(X_P - 0.25cos\theta_1)^2 + (Y_P - 0.25sin\theta_1)^2} \\ &= \sqrt{(X_P - 0.25cos\theta_1)^2 + (-0.25998X_P + 0.3705 - 0.25sin\theta_1)^2} \\ &= 0.25 \end{aligned} \tag{4-108}$$

Giải phương trình này để tìm X_P và thay thế vào (4-94) cung cấp các tọa độ (X_P, Y_P) của điểm đầu công tác P trong quá trình chuyển động. Sau đó, góc φ và θ_2 sẽ là:

$$\begin{aligned} \varphi &= arctan\frac{Y_P - Y_R}{X_P - X_R} = arctan\frac{Y_P - 0.25sin\theta_1}{X_P - 0.25cos\theta_1} \\ \theta_2 &= \theta_1 - \varphi = \theta_1 - arctan\frac{Y_P - 0.25sin\theta_1}{X_P - 0.25cos\theta_1} \end{aligned} \tag{4-109}$$

Vì vậy, để điểm P di chuyển theo đường thẳng (4-94), trong khi θ_1 biến đổi theo (4-96), góc θ_2 phải biến đổi theo (4-109).

4.2.5. Đường đi Descartes

Lập kế hoạch đường đi theo hệ tọa độ Descartes có tính toán tương tự như lập kế hoạch đường đi trong không gian khớp. Có tọa độ của điểm bắt đầu và điểm dừng của hiệu suất cuối cùng là

$$P_0 = P_0(X_0, Y_0, Z_0) \qquad P_1 = P_1(X_1, Y_1, Z_1) \tag{4-110}$$

Chúng ta có thể kết nối các điểm bằng một đường cong không gian hình học.

$$Z = Z(X) \qquad Y = Y(X) \tag{4-111}$$

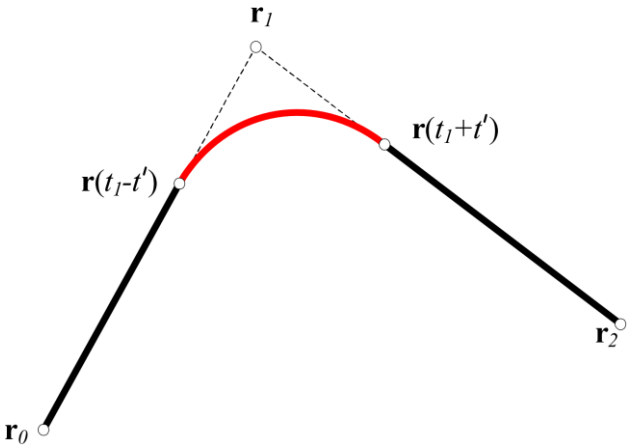
Trong đó,

$$X(t_0) = X_0 \qquad X(t_f) = X_f. \tag{4-112}$$

Chúng ta có thể xác định một đường thời gian cho một trong các tọa độ, chẳng hạn như X, giữa P_0 và P_f để xác định ứng xử động học của các tọa độ khác trên đường hình học (4-111).

Đường đi từ điểm này đến điểm khác cũng có thể được lập kế hoạch bằng cách nối các điểm lại với nhau hoặc thiết kế một đường đi để đi qua gần nhưng không nhất thiết phải qua các điểm. Một phương pháp thực tế là thiết kế một đường đi sử dụng các đường thẳng với vận tốc không đổi, và biến dạng các góc để có một chuyển tiếp mượt mà. Đường đi kết nối các điểm $\mathbf{r}_0$ đến $\mathbf{r}_2$, và đi qua gần góc $\mathbf{r}_1$ trên một đường cong chuyển đổi, có thể được thiết kế bằng một chuyển động từng phần.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_1 - \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) && t_0 \le t \le t_1 - t' \\
\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_1 - \frac{(t - t' - t_1)^2}{4t'(t_1 - t_0)}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \\
&\quad + \frac{(t + t' - t_1)^2}{4t'(t_2 - t_1)}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) && t_1 - t' \le t \le t_1 + t' \\
\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_1 - \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) && t_1 + t' \le t \le t_2
\end{aligned} \tag{4-113}$$



Hình 4-15 Đường cong parabol chuyển đổi giữa hai đoạn thẳng như một đường đi trong không gian Descartes.

Đường đi bắt đầu từ $\mathbf{r}_0$ vào thời điểm t_0 và di chuyển với vận tốc không đổi $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0}$ dọc theo một đường thẳng cho đến một điểm tại thời điểm chuyển đổi $t_1 - t'$. Tại thời điểm này, đường đi chuyển sang một parabol có gia tốc không đổi. Tại một điểm chuyển đổi khác vào thời điểm $t_1 + t'$, đường đi chuyển sang đường thẳng thứ hai và di chuyển với vận tốc không đổi $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}$ hướng tới điểm đích tại $\mathbf{r}_2$. Thời gian $t_1 - t_0$ là thời gian cần thiết để di chuyển từ $\mathbf{r}_0$ đến $\mathbf{r}_1$ và $t_2 - t_1$ là thời gian cần thiết để di chuyển từ $\mathbf{r}_1$ đến $\mathbf{r}_2$, nếu không có đường đi chuyển tiếp. Đường đi được minh họa trong Hình 4-15 theo một cách tương đối.

Ví dụ 4-14: Đường đi trong không gian 2D Descartes.

Xét một đường thẳng trên mặt phẳng XY nối (1,0) và (1,1), và một đường thẳng khác nối (1,1) và (0,1). Giả sử rằng thời gian là không tại (1,0), là $t = 1$ giây tại (1,1), và là $t = 2$ giây tại (0,1). Với khoảng thời gian $t' = 0.1$ giây, vector vị trí tại các điểm điều khiển là

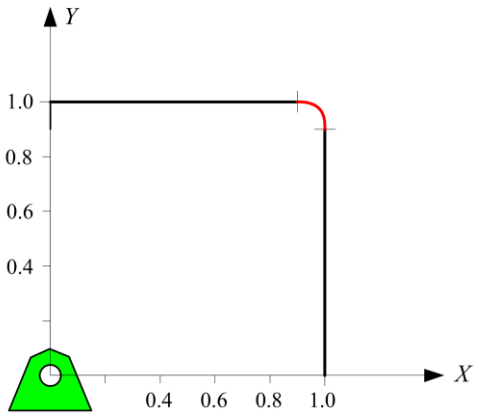
$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_0 &= \hat{\imath} \\ \boldsymbol{r}_1 &= \hat{\imath} + \hat{\jmath} \\ \boldsymbol{r}_2 &= \hat{\jmath} \\ \boldsymbol{r}(t_1 - t') = \boldsymbol{r}_1 - \frac{t'}{t_1}\boldsymbol{\delta}_1 &= \hat{\imath} + \left(1 - \frac{t'}{t_1}\right)\hat{\jmath} \\ \boldsymbol{r}(t_1 + t') = \boldsymbol{r}_1 + \frac{t'}{t_2}\boldsymbol{\delta}_2 &= \left(1 - \frac{t'}{t_2}\right)\hat{\imath} + \hat{\jmath} \end{aligned} \tag{4-114}$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_1 &= \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 = \hat{\jmath} \\ \boldsymbol{\delta}_2 &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = -\hat{\imath}. \end{aligned} \tag{4-115}$$

Đường đi của chuyển động sau đó được biểu diễn bằng hàm từng đoạn như sau, như minh họa trong Hình 4-16:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{cases} \hat{\imath} + t\hat{\jmath} & 0 \le t \le 0.9 \\ \left(1 - \dfrac{(t-0.9)^2}{0.4}\right)\hat{\imath} + \left(1 - \dfrac{(t-1.1)^2}{0.4}\right)\hat{\jmath} & 0.9 \le t \le 1.1 \\ (2-t)\hat{\imath} + \hat{\jmath} & 1.1 \le t \le 2 \end{cases} \tag{4-116}$$



Hình 4-16 Một parabol chuyển tiếp nối hai đường thẳng.

Tốc độ chuyển động dọc theo đường đi cũng là một hàm từng đoạn được cho dưới đây.

$$\dot{r}(t) = \begin{cases} \hat{\jmath} & 0 \le t \le 0.9 \\ \dfrac{t-0.9}{0.2}\hat{\imath} - \dfrac{t-1.1}{0.2}\hat{\jmath} & 0.9 \le t \le 1.1 \\ -\hat{\imath} & 1.1 \le t \le 2 \end{cases} \quad (4\text{-}117)$$

Ví dụ 4-15: Cánh tay robot 2R bám theo một đường thẳng.

Giả sử cánh tay robot 2R trong Hình 4-14 có:

$$l_1 = l_2 = 0.25 \quad (4\text{-}118)$$

và điểm đầu công tác của robot được cho là di chuyển trên một đường thẳng $Y = f(X)$.

$$Y = -0.25998X + 0.3705 \quad (4\text{-}119)$$

Cánh tay robot di chuyển từ P_1 đến P_2 trong 10 giây.

$$\begin{aligned} X_{P_1} &= 0.41122 \quad Y_{P_1} = 0.26359 \\ X_{P_2} &= -2.8188 \times 10^{-2} \quad Y_{P_2} = 0.37783 \end{aligned} \quad (4\text{-}120)$$

Chúng ta xác định một đường cong ba đỉnh từ vị trí nghỉ cho X.

$$X = 0.41122 - 0.01149096t^2 + 0.000766064t^3 \quad (4\text{-}121)$$

Chúng ta xác định phương trình của Y như một hàm của t bằng cách thay thế $X = X(t)$ vào phương trình đường thẳng (4-119).

$$Y = -1.9916 \times 10^{-4}t^3 + 2.9874 \times 10^{-3}t^2 + 0.26359 \quad (4\text{-}122)$$

4.2.6. Đường đi quay

Xem xét một khâu chấp hành cuối (end-effector) có ma trận quay ${}^{G}R_0$ ở một hướng ban đầu vào thời điểm t_0. Khâu chấp hành cuối phải ở một hướng cuối cùng ${}^{G}R_f$ vào thời điểm t_f. Đường đi quay được xác định bởi ma trận quay góc-trục $R_{\hat{u},\phi}$.

$$R_{0_{\hat{u},\phi}} = {}^{0}R_f = {}^{G}R_0^T \, {}^{G}R_f \quad (4\text{-}123)$$

Điều này biến đổi khâu chấp hành cuối từ hướng cuối ${}^{G}R_f$ sang hướng ban đầu ${}^{G}R_0$. Trục quay ${}^{0}\hat{u}$ được xác định bởi một vector đơn vị biểu diễn trong khung ban đầu. Do đó, ma trận quay mong muốn để đi từ hướng ban đầu đến hướng cuối sẽ là

$$R_{0_{\hat{u},\phi}}^T = {}^{G}R_f^T \, {}^{G}R_0. \quad (4\text{-}124)$$

Giữ nguyên ${}^{0}\hat{u}$, chúng ta có thể định nghĩa một đường cong góc cho φ thay đổi từ $R_{0_{\hat{u},\phi}}^T$ từ ${}^{G}R_0$ đến ${}^{G}R_f$ tại t_f.

Để điều khiển quay, chúng ta có thể xác định một loạt các hướng điều khiển ${}^{G}R_1$, ${}^{G}R_2, \cdots, {}^{G}R_n$ giữa các hướng ban đầu và cuối cùng, và quay khâu chấp hành cuối thông qua các hướng điều khiển. Khi có một hướng điều khiển ${}^{G}R_1$ giữa các hướng ban đầu và cuối cùng, sau đó hướng ban đầu ${}^{G}R_0$ biến đổi thành hướng điều khiển ${}^{G}R_1$ bằng cách sử dụng một phép quay

góc trục $R_{0_{\hat{u},\phi_0}}$ và sau đó nó biến đổi từ hướng điều khiển ${}^{G}R_1$ sang hướng cuối cùng bằng cách sử dụng một phép quay góc trục thứ hai $R_{1\ \hat{u},\phi_1}$.

$$\begin{aligned} R_{\ \hat{u},\phi_0} &= {}^{G}R_0^T\ {}^{G}R_1 \\ R_{\ 1,\phi_1} &= {}^{G}R_1^T\ {}^{G}R_f \end{aligned} \tag{4-125}$$

Ví dụ 4-16: Xoay quanh trục Z.

Xem xét một vật thể B ban đầu trùng với hệ tọa độ toàn cục G tại $t = 0$. Vì vậy, ma trận biến đổi ban đầu của nó là một đơn vị.

$${}^{G}R_1 = \boldsymbol{I} \tag{4-126}$$

B được giả định sẽ ở vị trí ${}^{G}R_2$ sau 10 giây.

$${}^{G}R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-127}$$

Trục quay ${}^{2}R_1$ là trục Z, và góc quay là π. Ma trận biến đổi giữa các hướng ban đầu và cuối cùng của B_1 và B_2 là:

$${}^{2}R_1 = {}^{G}R_1^T\ {}^{G}R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-128}$$

Chúng ta xác định một đường dẫn hình lập phương từ vị trí nghỉ cho góc quay α .

$$\alpha = \frac{3\pi}{100}t^2 - \frac{\pi}{500}t^3 \tag{4-129}$$

Lộ trình góc của B giữa B_1 và B_2 là:

$$\begin{aligned} {}^{2}R_1 &= \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\dfrac{3\pi}{100}t^2 - \dfrac{\pi}{500}t^3 & -sin\dfrac{3\pi}{100}t^2 - \dfrac{\pi}{500}t^3 & 0 \\ sin\dfrac{3\pi}{100}t^2 - \dfrac{\pi}{500}t^3 & cos\dfrac{3\pi}{100}t^2 - \dfrac{\pi}{500}t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-130}$$

Ví dụ 4-17: Xoay quanh trục X.

Một vật thể B ban đầu ở vị trí

$${}^{G}R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\dfrac{\pi}{10} & -sin\dfrac{\pi}{10} \\ 0 & sin\dfrac{\pi}{10} & cos\dfrac{\pi}{10} \end{bmatrix} \tag{4-131}$$

Vật thể được giả định ở vị trí ${}^{G}R_2$ trong 10 giây.

$$ {}^{G}R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\frac{\pi}{2} & -sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & sin\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}132) $$

Trục quay ${}^{2}R_1$ là trục X, và góc quay là $\frac{2}{5}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$. Chúng ta định nghĩa một đường đi từ vị trí nghỉ này đến vị trí nghỉ khác cho góc quay γ.

$$ \gamma = \frac{\pi}{10} + \frac{3\pi t^2}{250} - \frac{\pi t^3}{1250} \quad (4\text{-}133) $$

Để xác định đường đi góc của B giữa G và B_2 là:

$$ {}^{G}R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\gamma & -sin\gamma \\ 0 & sin\gamma & cos\gamma \end{bmatrix} \quad (4\text{-}134) $$

Vào bất kỳ thời điểm t nào, vật thể B đối với B_1 nằm ở ${}^{1}R_2$.

$$ \begin{aligned} {}^{1}R_2 &= {}^{1}R_G\,{}^{G}R_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.951cos\gamma - 0.309sin\gamma & -0.309cos\gamma - 0.951sin\gamma \\ 0 & 0.309cos\gamma + 0.951sin\gamma & 0.951cos\gamma - 0.309sin\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4\text{-}135) $$

4.2.7. Chuyển động tay máy theo đường đi của khâu chấp hành cuối

Lập kế hoạch đường đi Descartes là ứng dụng tự nhiên nhất của lập kế hoạch đường đi trong robot. Xem xét chuyển động gắp và thả là công việc chính của robot công nghiệp, chúng ta phải xác định một đường đi hình học mong muốn cho khâu chấp hành cuối trong không gian Descartes ba chiều của khung tọa độ cơ sở. Sau đó, chúng ta có thể xác định một đường thời gian cho một trong các tọa độ, ví dụ như X, và xác định lịch sử thời gian của các tọa độ khác bằng cách sử dụng đường đi hình học. Sau khi có các hàm thời gian của các tọa độ của khâu chấp hành cuối, chúng ta có thể xác định vận tốc, gia tốc và biểu hiện "độ giật" của khâu chấp hành cuối.

Động học ngược sẽ xác định các động học của biến khớp. Thay thế vị trí, vận tốc và gia tốc của các biến khớp vào các phương trình động học của chuyển động cung cấp mô-men hoặc lực cần thiết cho các cơ cấu cử động để di chuyển khâu chấp hành cuối trên đường đi mong muốn với động học được lập kế hoạch.

Đường hình học Descartes là một phương pháp được áp dụng trong quy hoạch đường đi trong robot học, bởi vì nó có thể điều khiển mức độ lực và độ giật được đưa vào bởi tay của robot vào vật mang. Quy hoạch đường đi trong không gian Descartes cũng xác định các ràng buộc hình học của thế giới thực. Tuy nhiên, đường đi Descartes cần động học ngược để xác định lịch sử thời gian của các biến của khớp.

Ví dụ 4-18: Đường đi khớp cho một đường đi Descartes đã thiết kế.

Xem xét một đường đi tọa độ Descartes từ điểm (1,1.5) đến điểm $(-1,1.5)$ trên một đường thẳng $Y = 1.5$. Một đa thức bậc ba có thể đáp ứng các ràng buộc về vị trí và vận tốc tại các điểm ban đầu và cuối.

$$\begin{aligned} X(0) &= X_0 = 1 \quad \dot{X}(0) = \dot{X}_0 = 0 \\ X(1) &= X_f = -1 \quad \dot{X}(1) = \dot{X}_f = 0 \end{aligned} \tag{4-136}$$

Các hệ số của đa thức là

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = -6 \quad a_3 = 4 \tag{4-137}$$

Và đường đi Descartes là:

$$\begin{aligned} X &= 1 - 6t^2 + 4t^3 \\ Y &= 1.5 \end{aligned} \tag{4-138}$$

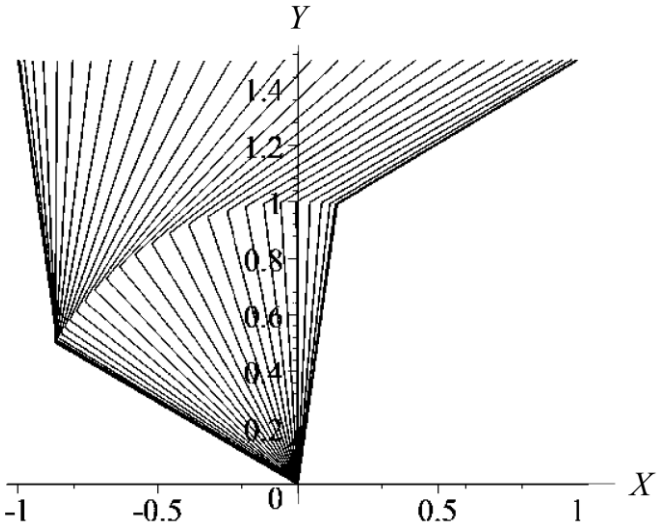
Động học ngược của một cánh tay robot phẳng 2R được tính toán như sau:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \pm 2atan2\sqrt{\frac{(l_1 + l_2)^2 - (X^2 + Y^2)}{(X^2 + Y^2) - (l_1 - l_2)^2}} \\ \theta_1 &= atan2\frac{X(l_1 + l_2 cos\theta_2) + Y l_2 sin\theta_2}{Y(l_1 + l_2 cos\theta_2) - X l_2 sin\theta_2} \end{aligned} \tag{4-139}$$

Dấu ($\pm$) chỉ ra các cấu hình nâng cánh tay lên và hạ cánh tay xuống của robot. Tùy thuộc vào cấu hình ban đầu tại điểm (1,1.5), cánh tay robot được giả định ở trong cấu hình đó. Xem xét một cấu hình cánh tay hướng lên. Do đó, chúng ta chỉ chấp nhận các giá trị của các biến liên kết thuộc về cấu hình cánh tay hướng lên. Thay thế (4-138) vào (4-139) sẽ cung cấp đường đi trong không gian khớp.

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \pm 2atan2\sqrt{\frac{(l_1 + l_2)^2 - (4t^3 - 6t^2 + 2.5)^2}{(4t^3 - 6t^2 + 1)^2 - (l_1 - l_2)^2}} \\ \theta_1 &= atan2\frac{(1 - 6t^2 + 4t^3)(l_1 + l_2 cos\theta_2) + 1.5 l_2 sin\theta_2}{1.5(l_1 + l_2 cos\theta_2) - (1 - 6t^2 + 4t^3) l_2 sin\theta_2} \end{aligned} \tag{4-140}$$

Minh hoạ đồ họa của bộ cánh tay robot tại mỗi 1/30 tổng thời gian được hiển thị trong Hình 4-17.



Hình 4-17 Minh hoạ của một robot 2R khi điểm đầu di chuyển trên một đường thẳng y = 1.5.

Ví dụ 4-19: Cánh tay robot 2R trên một đường thẳng.

Xem xét cánh tay robot 2R trong Hình 4-14 với

$$l_1 = l_2 = 0.25\ m \tag{4-141}$$

Điểm đầu của nó được giả định sẽ di chuyển trên một đường thẳng đã cho.

$$Y = -0.25998X + 0.3705 \tag{4-142}$$

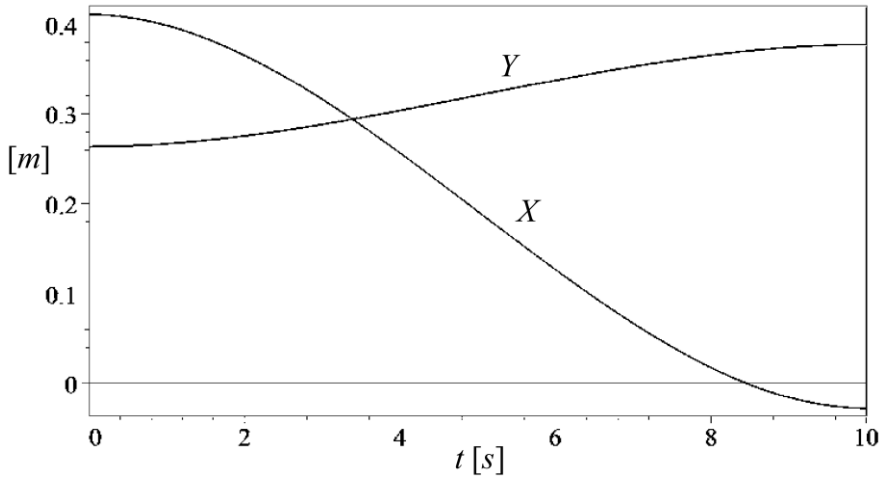
giữa P_1 và P_2 trong 10 giây.

$$\begin{aligned} X_{P_1} &= 0.41122 \quad Y_{P_1} = 0.26359 \\ X_{P_2} &= -0.0282 \quad Y_{P_2} = 0.37783 \end{aligned} \tag{4-143}$$

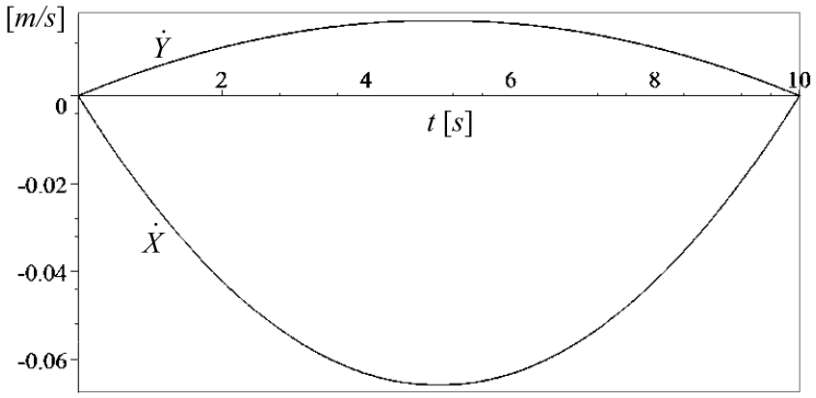
lập phương từ vị trí nghỉ cho X, chúng ta xác định đường đi Descartes của điểm đầu.

$$\begin{aligned} X &= 0.41122 - 0.0131826t^2 + 0.00087884t^3 \\ Y &= -0.00022848t^3 + 0.003427t^2 + 0.26359 \end{aligned} \tag{4-144}$$

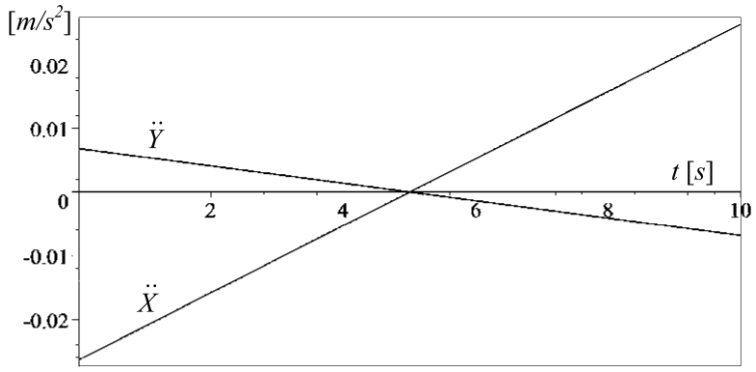
Động học của điểm đầu đang được thể hiện trong các Hình 4-18 đến Hình 4-20. Bằng cách sử dụng động học nghịch, chúng ta tìm ra sự biến thiên của góc khớp như được thể hiện trong Hình 4-21. Hãy chia tổng thời gian chuyển động thành $n = 40$ khoảng thời gian bằng nhau. Cấu hình của cánh tay máy ở mỗi bước thời gian được thể hiện trong Hình 4-22.



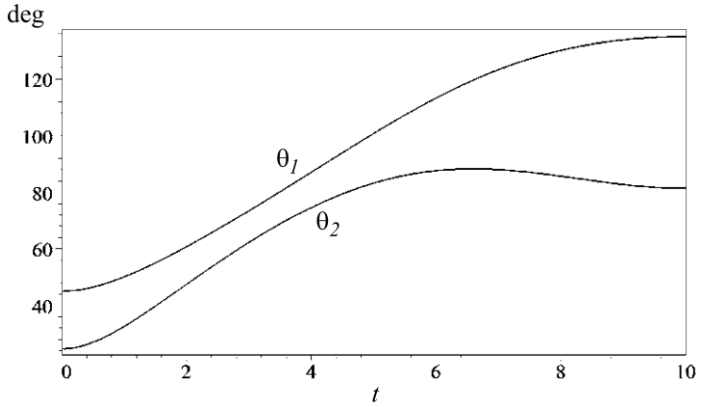
Hình 4-18 Tọa độ Descartes của điểm đầu so với thời gian.



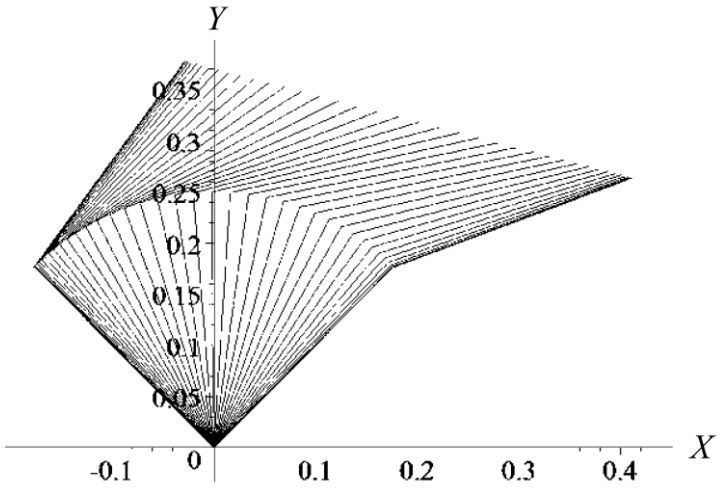
Hình 4-19 Thành phần của vận tốc điểm đầu so với thời gian.



Hình 4-20 Thành phần của gia tốc điểm đầu so với thời gian.



Hình 4-21 Biến thiên của góc khớp của cánh tay robot 2R.



Hình 4-22 Cấu hình của cánh tay máy 2R tại 42 bước thời gian bằng nhau.

4.2.8. Bài tập

1. Thiết kế một luật điều khiển mô-men xoắn tính toán để bù đắp sai số trong quá trình chuyển động.

a. $q(0) = -10$ độ, $q(1) = 45$ độ, $\dot{q}(0) = \dot{q}(1) = 0$

b. $q(0) = 0$ độ, $q(1) = 50$ độ, $\dot{q}(0) = \dot{q}(1) = 0$

c. $q(0) = 10$ độ, $q(1) = 60$ độ, $\dot{q}(0) = \dot{q}(10) = 0$

2. Tìm một đường đi parabol để thỏa mãn các điều kiện sau:

$$q(0) = -10 \text{ độ}, q(1) = 45 \text{ độ}, \dot{q}(1) = 0.$$

Tính toán vận tốc ban đầu của đường đi bằng cách sử dụng đường đi bậc hai. Sau đó, tìm một đường đi bậc ba để đáp ứng các điều kiện biên giống như đường đi bậc hai. So sánh gia tốc tối đa của hai đường đi.

3. Tính toán một đường đi để đáp ứng các điều kiện sau đây:

$$q(0) = -10 \text{ độ}, q(10) = 45 \text{ độ}, \dot{q}(0) = \dot{q}(10) = 0$$

Và di chuyển với vận tốc hằng số $\dot{q} = 25$ độ/giây giữa 12 độ và 35 độ.

4. Tính toán một đường đi với gia tốc không đổi $\ddot{q} = 25$ độ/$giây^2$ giữa 12 độ và 35 độ, và đáp ứng các điều kiện sau đây:

$$q(0) = -10 \text{ độ}, q(10) = 45 \text{ độ}, \dot{q}(0) = \dot{q}(10) = 0.$$

5. Tìm một đường đi để đáp ứng các điều kiện

$$q(0) = 10 \text{ độ}, q(1) = 95 \text{ độ}, \dot{q}(0) = \dot{q}(1) = 0$$

và đi qua các điểm điều khiển sau đây:

$$q(0.25) = 30 \text{ độ}, \qquad q(0.5) = 65 \text{ độ}$$

4.3. Các kỹ thuật điều khiển

Sử dụng động học ngược, chúng ta có thể tính toán động học khớp cho một đường đi hình học mong muốn của khâu chấp hành cuối của robot. Thay thế động học khớp vào các phương trình chuyển động cung cấp các lệnh cho bộ truyền động. Việc áp dụng các lệnh này sẽ di chuyển khâu chấp hành cuối của robot trên đường đi mong muốn lý tưởng. Tuy nhiên, do những nhiễu loạn và các hiện tượng không được mô hình hóa, robot sẽ không theo chính xác đường đi mong muốn. Các kỹ thuật giảm thiểu hoặc loại bỏ sự khác biệt này được gọi là các kỹ thuật điều khiển [9].

4.3.1. Điều khiển vòng hở và vòng kín

Robot là một cơ cấu với một cơ cấu chấp hành tại mỗi khớp i để tác dụng lực hoặc mô-men xoắn nhằm điều khiển khâu (i). Robot được trang bị các cảm biến vị trí, vận tốc, và có thể là cảm biến gia tốc để đo lường các biến động học của khớp. Các giá trị đo được thường là thông tin động học của khung tọa độ B_i, gắn với khâu (i), so với khung B_{i-1} hoặc B_0.

Để mỗi khớp của robot theo một chuyển động mong muốn, chúng ta phải cung cấp lệnh mô-men xoắn cần thiết. Giả sử rằng quỹ đạo mong muốn của các biến khớp $\mathbf{q}_d = \mathbf{q}(t)$ được cho dưới dạng các hàm theo thời gian. Sau đó, các mô-men xoắn cần thiết để làm cho robot theo chuyển động mong muốn được tính toán bằng các phương trình chuyển động và bằng với

$$\mathbf{Q_c} = \mathbf{D}(\mathbf{q_d})\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{d} + \mathbf{H}(\mathbf{q_d}, \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{d}) + \mathbf{G}(\mathbf{q_d}) \qquad (4\text{-}145)$$

trong đó các chỉ số dưới d và c lần lượt đại diện cho mong muốn và điều khiển.

Một cách lý tưởng, các biến có thể được đo lường chính xác và robot có thể hoạt động hoàn hảo dựa trên các phương trình chuyển động (4-145). Khi đó, lệnh điều khiển của các cơ cấu chấp hành $\mathbf{Q}_c$ có thể khiến đường đi mong muốn $\mathbf{q}_d$ trở thành hiện thực.

Đây là một thuật toán điều khiển vòng hở, trong đó các lệnh điều khiển được tính toán dựa trên một quỹ đạo mong muốn đã biết và các phương trình chuyển động. Sau đó, các lệnh điều khiển được đưa vào hệ thống để tạo ra quỹ đạo mong muốn. Do đó, trong một thuật toán điều khiển vòng hở, chúng ta mong muốn robot sẽ bám theo quỹ đạo đã thiết kế, tuy nhiên, không có cơ cấu nào để bù đắp bất kỳ sai số có thể xảy ra.

Giả sử rằng chúng ta đang quan sát robot trong quá trình chuyển động của nó bằng cách đo động học của các khớp. Tại bất kỳ thời điểm nào cũng có thể có sự khác biệt giữa các biến khớp thực tế và các giá trị mong muốn. Sự khác biệt này được gọi là sai số và được đo bằng

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \mathbf{q} - \mathbf{q}_\mathrm{d} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_\mathrm{d}.\end{aligned} \tag{4-146}$$

Xác định một luật điều khiển và tính toán một vector lệnh điều khiển mới bằng cách

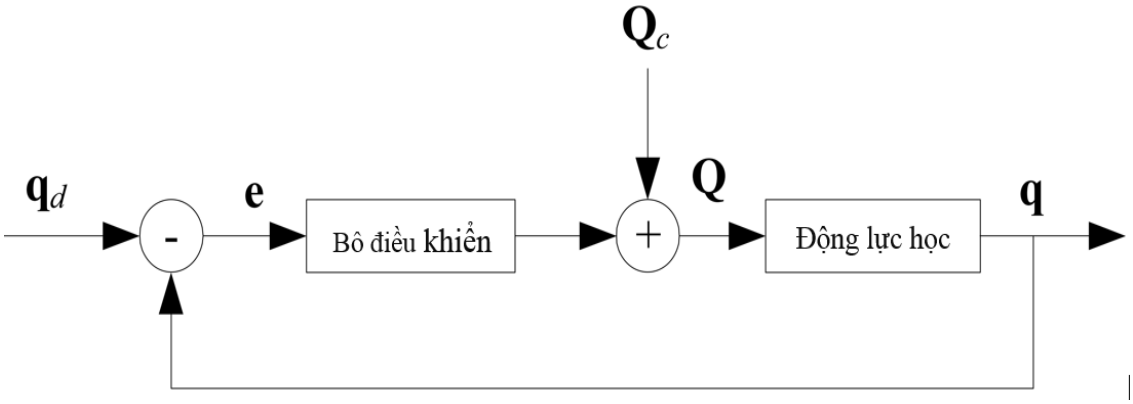
$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\mathrm{c} + \mathbf{k}_\mathrm{D}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{k}_\mathrm{P}\mathbf{e} \tag{4-147}$$

Trong đó $\mathbf{k}_P$ và $\mathbf{k}_D$ là các hệ số điều khiển không đổi. Luật điều khiển so sánh các biến khớp thực tế $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ với các giá trị mong muốn $(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)$, và tạo ra một lệnh tỉ lệ. Việc áp dụng lệnh điều khiển mới này thay đổi các phương trình động lực của robot để tạo ra các biến khớp thực tế $\mathbf{q}$.

$$\mathbf{Q_c} + \mathbf{k_D}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{k_P}\mathbf{e} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \tag{4-148}$$

Hình 4-23 minh họa ý tưởng của phương pháp điều khiển này trong một sơ đồ khối. Đây là một thuật toán điều khiển vòng kín, trong đó các lệnh điều khiển được tính toán dựa trên sự khác biệt giữa các biến thực tế và mong muốn. Đọc các biến thực tế và so sánh với các giá trị mong muốn được gọi là phản hồi, và vì vậy, thuật toán điều khiển vòng kín cũng được gọi là thuật toán điều khiển phản hồi.

Bộ điều khiển cung cấp một tín hiệu tỉ lệ với sai số và tốc độ thời gian của nó. Tín hiệu này được thêm vào lệnh dự đoán $\mathbf{Q}_c$ để bù đắp sai số.



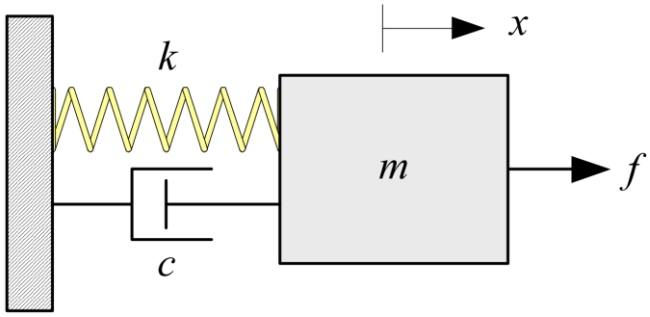
Hình 4-23 Minh họa thuật toán điều khiển phản hồi [1].

Nguyên tắc điều khiển phản hồi có thể được diễn đạt như sau: Tăng lệnh điều khiển khi biến số thực tế nhỏ hơn giá trị mong muốn và giảm lệnh điều khiển khi biến số thực tế lớn hơn giá trị mong muốn.

Ví dụ 4-20: Dao động có khối lượng - lò xo - giảm chấn

Xem xét một dao động tuyến tính được tạo ra bằng một hệ thống có khối lượng - lò xo - giảm chấn như được hiển thị trong Hình 4-24. Phương trình chuyển động cho dao động dưới tác động của một lực bên ngoài f là

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \tag{4-149}$$



Hình 4-24 Hệ dao động có khối lượng - lò xo - cản

Trong đó, f là lệnh điều khiển, m là khối lượng của vật dao động, c là lực cản nhớt, và k là độ cứng của lò xo. Lực cần thiết để đạt được độ dịch chuyển mong muốn $x_d = x(t)$ được tính từ phương trình chuyển động.

$$f_c = m\ddot{x}_d + c\dot{x}_d + kx_d \tag{4-150}$$

Thuật toán điều khiển vòng hở được hiển thị trong Hình 4-25(a). Để loại bỏ bất kỳ sai số nào có thể xảy ra, chúng ta có thể sử dụng sự chênh lệch giữa đầu ra mong muốn và đầu ra thực tế $e = x - x_d$, và định nghĩa một luật điều khiển.

$$f = f_c + k_D\dot{e} + k_P e \; k_D > 0 \; k_P > 0 \tag{4-151}$$

Luật điều khiển mới sử dụng một lệnh phản hồi như được thể hiện trong Hình 4-25(b). Cũng có thể định nghĩa một luật điều khiển mới chỉ dựa trên tín hiệu lỗi như sau:

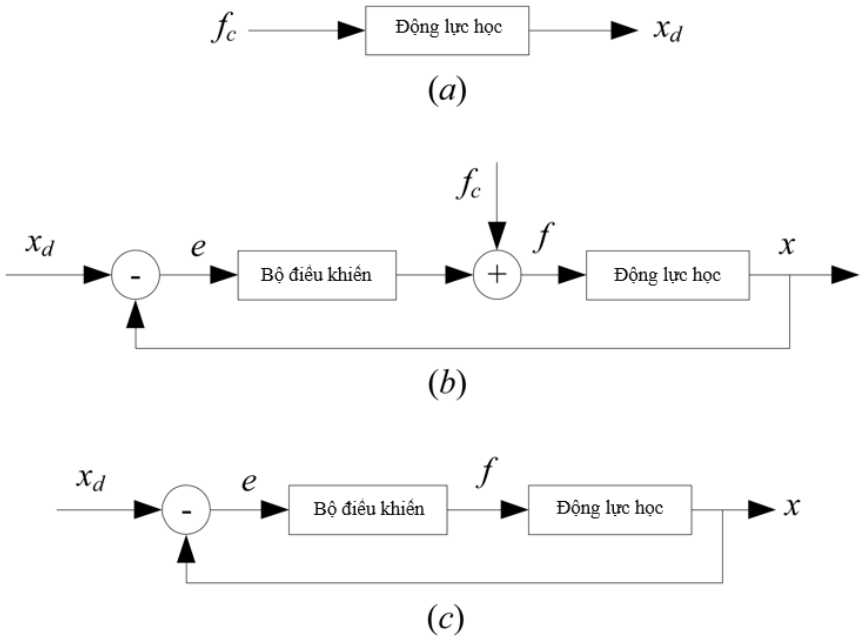
$$f = -k_D\dot{e} - k_P e. \tag{4-152}$$

Sử dụng luật này, chúng ta có thể định nghĩa một thuật toán điều khiển phản hồi gọn gàng hơn và thay đổi phương trình chuyển động thành

$$m\ddot{x} + (c + k_D)\dot{x} + (k + k_P)x = k_D\dot{x}_d + k_P x_d. \tag{4-153}$$

Phương trình của hệ thống có thể được tóm tắt trong một sơ đồ khối như được hiển thị trong Hình 4-25(c).

Một sơ đồ tổng quan của một hệ thống điều khiển phản hồi có thể được giải thích như sau: một tín hiệu từ đầu ra phản hồi để so sánh với đầu vào. Tín hiệu phản hồi này đóng một vòng lặp và làm cho việc sử dụng từ phản hồi và vòng lặp đóng là hợp lý. Nguyên tắc của việc điều khiển vòng lặp đóng là phát hiện bất kỳ sai số nào giữa đầu ra thực tế và mong muốn. Miễn là tín hiệu sai số không bằng không, bộ điều khiển tiếp tục thay đổi lệnh điều khiển sao cho tín hiệu sai số hội tụ về không.



Hình 4-25 Các thuật toán điều khiển vòng hở và vòng kín cho bộ dao động tuyến tính [1].

Ví dụ 4-21: Ổn định của hệ thống điều khiển.

Xem xét một dao động tuyến tính khối-lò xo-bộ giảm chấn như trong Hình 4-24 Hệ dao động có khối lượng - lò xo - cảnvới phương trình chuyển động được cho bởi

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f. \tag{4-154}$$

Chúng ta xác định một luật điều khiển dựa trên đầu ra thực tế.

$$f = -k_D\dot{x} - k_P x \qquad k_D > 0 \qquad k_P > 0 \tag{4-155}$$

và chuyển đổi phương trình chuyển động thành

$$m\ddot{x} + (c + k_D)\dot{x} + (k + k_P)x = 0. \tag{4-156}$$

So sánh với phương trình mạch hở (4-154), phương trình mạch kín cho thấy bộ dao động hoạt động như một hệ thống dao động tự do dưới tác động của độ cứng mới $k + k_P$ và độ giảm chấn $c + k_D$. Do đó, luật điều khiển đã thay đổi độ cứng và độ giảm chấn rõ ràng của hệ thống thực tế. Ví dụ này giới thiệu ứng dụng cơ bản nhất của lý thuyết điều khiển để cải thiện các đặc tính của một hệ thống và vận hành hệ thống theo cách mong muốn.

Hệ thống điều khiển phải ổn định khi đầu ra mong muốn của hệ thống thay đổi, và cũng phải có khả năng loại bỏ ảnh hưởng của nhiễu. Sự ổn định của một hệ thống điều khiển được xác định như sau: Đầu ra phải duy trì trong giới hạn cho đầu vào nhất định hoặc hàm nhiễu giới hạn.

Để khảo sát tính ổn định của hệ thống, chúng ta phải giải phương trình vi phân vòng lặp đóng (4-156). Phương trình này là tuyến tính và do đó, nó có một giải pháp hàm mũ.

$$x = e^{\lambda t} \tag{4-157}$$

Thay thế giải pháp vào phương trình (4-156) đưa ra phương trình đặc trưng

$$m\lambda^2 + (c + k_D)\lambda + (k + k_P) = 0 \tag{4-158}$$

Với hai nghiệm

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c+k_D}{2m} \pm \frac{\sqrt{(c+k_D)^2 - 4m(k+k_P)}}{2m}. \tag{4-159}$$

Tính chất của giải pháp (4-157) phụ thuộc vào λ_1 và λ_2, và do đó phụ thuộc vào $k_D$và k_P. Các nghiệm của phương trình đặc trưng là số phức.

$$\begin{aligned} \lambda &= -a \pm bi \\ a &= \frac{c+k_D}{2m} \\ b &= \frac{\sqrt{4m(k+k_P) - (c+k_D)^2}}{2m} \end{aligned} \tag{4-160}$$

miễn là các hệ số tăng (gains) được thiết đặt sao cho

$$(c+k_D)^2 < 4m(k+k_P). \tag{4-161}$$

Trong trường hợp này, giải pháp của phương trình chuyển động là

$$x = Ce^{-\xi\omega_n t} sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \varphi\right) \tag{4-162}$$

Trong đó,

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k+k_P}{m}} = \sqrt{a^2+b^2} \\ \xi &= \frac{c+k_D}{2\sqrt{m(k+k_P)}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned} \tag{4-163}$$

Tham số ω_n được gọi là tần số tự nhiên, và ξ là tỉ số cản của hệ thống. Tỉ số cản điều khiển ứng xử của hệ thống theo các loại sau đây:

1. Nếu $\xi = 0$, thì các giá trị đặc trưng là thuần túy ảo, $\lambda_{1,2} = \pm bi = \pm i\frac{1}{2m}\sqrt{4m(k+k_P)}$. Trong trường hợp này, hệ thống không có độ giảm chấn, do đó, nó dao động với biên độ không đổi quanh vị trí cân bằng, $x = 0$, mãi mãi.

2. Nếu $0 < \xi < 1$, thì hệ thống bị giảm chấn dưới và nó dao động quanh điểm cân bằng với biên độ giảm dần. Trong trường hợp này, hệ thống ổn định tiệm cận.

3. Nếu $\xi = 1$, thì hệ thống là hệ tắt dần tới hạn. Một bộ dao động tắt dần tới hạn có sự trở về trạng thái cân bằng nhanh nhất mà không có dao động.

4. Nếu $\xi > 1$, thì hệ thống bị tắt dần và nó trở lại trạng thái cân bằng một cách chậm mà không dao động. Các giá trị đặc trưng là số thực và nghiệm của bộ dao động tắt dần là

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ (\lambda_{1,2}) &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4-164}$$

5. Nếu $\xi < 0$, thì hệ thống không ổn định vì giải pháp là

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ Re(\lambda_{1,2}) &> 0 \end{aligned} \tag{4-165}$$

và cho thấy một chuyển động với biên độ tăng dần.

Ví dụ 4-22: Thuật toán điều khiển robot.

Các robot là các hệ thống động học phi tuyến tính, và không có phương pháp tổng quát nào để thiết kế một bộ điều khiển phi tuyến tính phù hợp cho mọi robot trong mọi nhiệm vụ. Tuy nhiên, có một loạt các phương pháp thay thế và bổ sung, mỗi phương pháp phù hợp nhất với một lớp cụ thể của các robot trong một nhiệm vụ cụ thể. Các phương pháp điều khiển quan trọng nhất là như sau:

Phản hồi tuyến tính (Feedback Linearization) hoặc Kỹ thuật Điều khiển Mô-men xoắn (Computed Torque Control Technique). Trong kỹ thuật phản hồi tuyến tính, chúng ta xác định một luật điều khiển để có được một phương trình vi phân tuyến tính cho lệnh sai số, sau đó sử dụng các kỹ thuật thiết kế điều khiển tuyến tính. Kỹ thuật phản hồi tuyến tính có thể được áp dụng vào robot thành công, tuy nhiên, nó không đảm bảo tính ổn định theo sự thay đổi của tham số hoặc các nhiễu.

Kỹ thuật này là một phương pháp điều khiển dựa trên mô hình, vì luật điều khiển được thiết kế dựa trên mô hình danh định của robot.

Kỹ thuật điều khiển tuyến tính (Linear Control Technique). Kỹ thuật đơn giản nhất để điều khiển robot là thiết kế một bộ điều khiển tuyến tính dựa trên tuyến tính hóa các phương trình chuyển động xung quanh một điểm hoạt động. Kỹ thuật tuyến tính hóa này xác định tính ổn định của robot một cách cục bộ. Các kỹ thuật điều khiển tuyến tính thực tế nhất bao gồm tỷ lệ, tích phân và đạo hàm, hoặc bất kỳ sự kết hợp nào của chúng.

Kỹ thuật điều khiển thích nghi. Điều khiển thích nghi là một kỹ thuật để điều khiển các robot có thay đổi bất định hoặc thay đổi theo thời gian. Kỹ thuật điều khiển thích nghi hiệu quả hơn đối với các robot có số bậc tự do (DOF) thấp.

Kỹ thuật điều khiển bền vững và thích ứng (Robust and Adaptive Control Technique). Trong phương pháp điều khiển bền vững, bộ điều khiển được thiết kế dựa trên mô hình danh nghĩa cộng với một số bất định. Bất định có thể nằm ở bất kỳ thông số nào, chẳng hạn như tải mà khâu chấp hành cuối đang mang. Ví dụ, chúng ta phát triển một kỹ thuật điều khiển để có hiệu quả cho các tải trong khoảng $1 - 10$ kg.

Kỹ thuật điều khiển theo lịch trình-hệ số (Gain-Scheduling Control Technique). Gain-scheduling là một kỹ thuật áp dụng các kỹ thuật điều khiển tuyến tính vào động học phi tuyến của robot. Trong gain-scheduling, chúng ta chọn một số điểm điều khiển để bao phủ phạm vi hoạt động của robot. Sau đó, tại mỗi điểm điều khiển, chúng ta tạo ra một xấp xỉ tuyến tính biến thiên theo thời gian cho động học của robot và thiết kế một bộ điều khiển tuyến tính. Các thông số của bộ điều khiển sau đó được nội suy hoặc lập lịch trình giữa các điểm điều khiển.

4.3.2. Điều khiển mô-men xoắn

Động lực học của robot có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \tag{4-166}$$

Trong đó, $\mathbf{q}$ là vector của các biến khớp, và $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ là các mô-men xoắn tác dụng tại các khớp. Giả sử một quỹ đạo mong muốn trong không gian khớp được cho bởi một hàm hai lần khả vi $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d(t) \in C^2$. Do đó, lịch sử thời gian mong muốn của vị trí, vận tốc, và gia tốc của các khớp được biết. Chúng ta có thể điều khiển robot để bám theo đường dẫn mong muốn, bằng cách giới thiệu một luật điều khiển mô-men xoắn tính toán như dưới đây.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{k}_D\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k}_P\mathbf{e}) + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \tag{4-167}$$

Trong đó $\mathbf{e}$ là vector sai số

$$\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \tag{4-168}$$

Và $\mathbf{k}_D$ và $\mathbf{k}_P$ là các ma trận chéo hằng số. Luật điều khiển là ổn định và được áp dụng miễn là tất cả các giá trị riêng của ma trận sau có phần thực âm.

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{k}_P & -\mathbf{k}_D \end{bmatrix} \tag{4-169}$$

Ví dụ 4-23: Điều khiển lực tính toán cho một bộ dao động.

Hình 4-24 mô tả một bộ dao động đàn hồi tuyến tính dưới tác động của một lực điều khiển. Phương trình chuyển động cho bộ dao động là

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f. \tag{4-170}$$

Áp dụng một luật điều khiển lực tính toán

$$\begin{aligned} f &= m(\ddot{x}_d - k_D\dot{e} - k_P e) + c\dot{x} + kx \\ e &= x - x_d \end{aligned} \tag{4-171}$$

Giảm phương trình sai số thành đẳng thức

$$\ddot{e} + k_D\dot{e} + k_P e = 0. \tag{4-172}$$

Giải pháp của phương trình sai số là

$$\begin{aligned} e &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ \lambda_{1,2} &= -k_D \pm \sqrt{k_D^2 - 4k_P} \end{aligned} \tag{4-173}$$

Trong đó, A và B là các hàm của các điều kiện ban đầu, và $\lambda_{1,2}$ là các giải của phương trình đặc trưng.

$$m\lambda^2 + k_D\lambda + k_P = 0. \tag{4-174}$$

Giải pháp (4-173) ổn định và $e \to 0$ theo cấp số nhân khi $t \to \infty$ nếu $k_D > 0$.

Ví dụ 4-24: Con lắc ngược.

Xem xét một con lắc ngược như được hiển thị trong Hình 4-26. Phương trình chuyển động của nó là

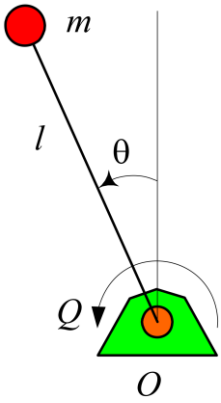
$$ml^2\ddot{\theta} - mglsin\theta = Q. \tag{4-175}$$

Để điều khiển con lắc và đưa nó từ một góc ban đầu $\theta = \theta_0$ đến vị trí thẳng đứng dọc, chúng ta có thể sử dụng một luật điều khiển phản hồi như sau:

$$Q = -k_D\dot{\theta} - k_P\theta - mglsin\theta. \tag{4-176}$$

Các tham số k_D và k_P là các hệ số dương và được giả định là hằng số. Luật điều khiển (4-176) biến đổi động lực học của hệ thống thành

$$ml^2\ddot{\theta} + k_D\dot{\theta} + k_P\theta = 0 \tag{4-177}$$



Hình 4-26 Con lắc ngược được điều khiển.

Chứng minh rằng hệ thống hoạt động như một hệ thống ổn định như lò xo đàn hồi và giảm chấn.

Trong trường hợp vị trí mong muốn của con lắc là tại một góc không bằng không, $\theta = \theta_d$, chúng ta có thể sử dụng một luật điều khiển phản hồi dựa trên sai số $e = \theta - \theta_d$ như sau

$$Q = ml^2\ddot{\theta}_d - k_D\dot{e} - k_Pe - mglsin\theta. \tag{4-178}$$

Dùng luật điều khiển này thay vào phương trình chuyển động (4-175) cho thấy rằng động lực học của hệ thống được điều khiển được xác định bởi

$$ml^2\ddot{e} + k_D\dot{e} + k_Pe = 0. \tag{4-179}$$

Ví dụ 3-25: Điều khiển cánh tay robot phẳng 2R.

Cánh tay robot phẳng 2R được hiển thị trong Hình 4-27 với các phương trình động lực được cung cấp dưới đây.

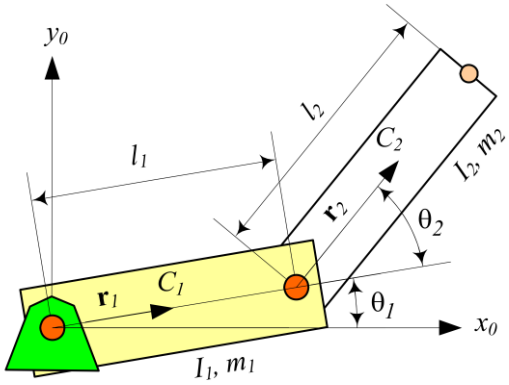
$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \tag{4-180}$$

Trong đó

$$\begin{aligned} D_{11} &= m_1 r_1^2 + I_1 + m_2(l_1^2 + l_1 r_2 cos\theta_2 + r_2^2) + I_2 \\ D_{21} &= D_{12} = m_2 l_1 r_2 cos\theta_2 + m_2 r_2^2 + I_2 \\ D_{22} &= m^2 r_2^2 + I_2 \end{aligned} \quad (4\text{-}181)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= -m_2 l_1 r_2 \dot{\theta}_2 sin\theta_2 \\ C_{21} &= -m_2 l_1 r_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) sin\theta_2 \\ C_{12} &= m_2 l_1 r_2 \dot{\theta}_1 sin\theta_2 \\ C_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (4\text{-}182)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= m_1 g r_1 cos\theta_1 + m_2 g\big(l_1 cos\theta_1 + r_2 cos(\theta_1 + \theta_2)\big) \\ G_2 &= m_2 g r_2 cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (4\text{-}183)$$



Hình 4-27 Robot có cấu trúc 2R phẳng với các khâu có khối lượng.

Viết các phương trình chuyển động dưới dạng sau đây:

$$\mathbf{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Q} \quad (4\text{-}184)$$

và nhân cả hai bên của phương trình với $\mathbf{D^{-1}}$ để chuyển đổi các phương trình chuyển động thành

$$\mathbf{\ddot{q} + D^{-1}C\dot{q} + D^{-1}G = D^{-1}Q.} \quad (4\text{-}185)$$

Để điều khiển bộ điều khiển để bám theo một đường dẫn mong muốn $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d(t)$, chúng ta áp dụng luật điều khiển sau:

$$\mathbf{Q = D(q)U + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)} \quad (4\text{-}186)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{\ddot{q}_d - 2k\dot{e} - k^2 e} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{q - q_d}. \end{aligned} \quad (4\text{-}187)$$

Vector **U** là đầu vào điều khiển, **e** là sai số vị trí, và k là một hằng số dương là hệ số tăng. Thay thế luật điều khiển vào phương trình chuyển động cho thấy rằng vector sai số thoả mãn một phương trình vi phân thông thường bậc hai tuyến tính.

$$\mathbf{\ddot{e} + 2k\dot{e} + k^2 e = 0} \quad (4\text{-}188)$$

và do đó, hội tụ theo cấp số mũ về không.

4.3.3. Kỹ thuật điều khiển tuyến tính

Phương pháp tuyến tính hóa phương trình chuyển động của robot xung quanh một điểm hoạt động trong khi áp dụng một thuật toán điều khiển tuyến tính là một phương pháp điều khiển robot thực tế cũ. Kỹ thuật này hoạt động tốt trong một vùng lân cận của điểm hoạt động. Do đó, đây chỉ là một phương pháp ổn định cục bộ. Các kỹ thuật điều khiển tuyến tính bao gồm tỉ lệ, tích phân, đạo hàm và bất kỳ sự kết hợp nào của chúng [10].

Ý tưởng là tuyến hóa các phương trình chuyển động phi tuyến tính xung quanh một số điểm vận hành tham chiếu để tạo ra một hệ thống tuyến tính, thiết kế một bộ điều khiển cho hệ thống tuyến tính đó, và sau đó, áp dụng điều khiển vào robot. Kỹ thuật này luôn tạo ra một bộ điều khiển ổn định trong một vùng lân cận của điểm vận hành. Tuy nhiên, vùng lân cận ổn định có thể rất nhỏ và khó xác định.

Một thuật toán điều khiển tỷ lệ-tích phân-đạo hàm (PID) sử dụng sai số vị trí, sai số đạo hàm và sai số tích phân để phát triển một luật điều khiển. Do đó, một luật điều khiển PID có dạng tổng quát sau cho tín hiệu điều khiển đầu vào:

$$Q = k_P e + k_I \int_0^t e dt + k_D \dot{e} \qquad (4\text{-}189)$$

Trong đó $e = q - q_d$ là tín hiệu sai số, và k_P, k_I và k_D là các hệ số hằng số dương liên quan đến bộ điều khiển tỉ lệ, tích phân và đạo hàm.

Lệnh điều khiển Q là tổng của ba thành phần: thành phần P, tỉ lệ với sai số e; thành phần I, tỉ lệ với tích phân của sai số; và thành phần D, tỉ lệ với đạo hàm của sai số.

4.3.3.1. Điều khiển tỷ lệ

Trong trường hợp điều khiển tỷ lệ, định luật điều khiển PID (4-189) giảm xuống thành

$$Q = k_P e + Q_d. \qquad (4\text{-}190)$$

Biến Q_d là lệnh điều khiển mong muốn, được gọi là hệ số điều chỉnh hoặc reset. Khi tín hiệu sai số bằng không, lệnh điều khiển bằng giá trị mong muốn. Điều khiển tỉ lệ có một điểm yếu là gây ra sai số không đổi ở điều kiện ổn định.

4.3.3.2. Điều khiển tích phân

Chức năng chính của điều khiển tích phân là loại bỏ sai số trạng thái ổn định và làm cho hệ thống tuân theo điểm thiết lập trong điều kiện trạng thái ổn định. Bộ điều khiển tích phân dẫn đến một lệnh điều khiển tăng dần cho một sai số dương và một lệnh điều khiển giảm dần cho một sai số âm. Một bộ điều khiển tích phân thường được sử dụng cùng với một bộ điều khiển tỉ lệ. Luật điều khiển cho một bộ điều khiển PI là

$$Q = k_P e + k_I \int_0^t e dt. \qquad (4\text{-}191)$$

4.3.3.3. Điều khiển đạo hàm

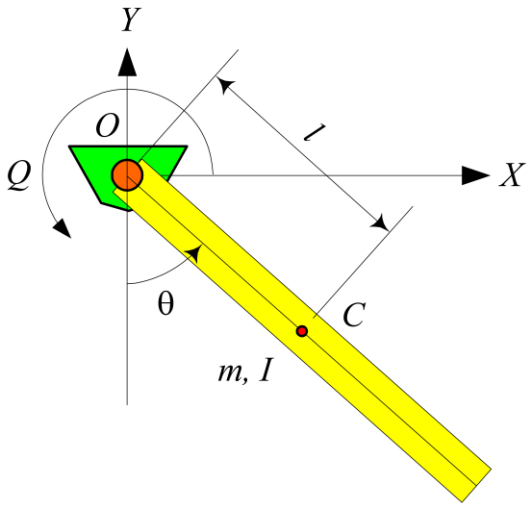
Mục đích của điều khiển đạo hàm là cải thiện tính ổn định của hệ thống. Bộ điều khiển đạo hàm có tác động dự đoán bằng cách ngoại suy sai số bằng một tiếp tuyến với đường cong sai số. Bộ điều khiển đạo hàm thường được sử dụng cùng với bộ điều khiển tỷ lệ. Luật điều khiển PD là:

$$Q = k_P e + k_D \dot{e} \tag{4-192}$$

Ví dụ 4-26: Điều khiển tuyến tính cho con lắc.

Hình 4-28 mô tả một con lắc được điều khiển như một cánh tay đơn. Phương trình chuyển động của cánh tay là

$$Q = I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mglsin\theta \tag{4-193}$$



Hình 4-28 Con lắc.

Trong đó, I là động lượng quán tính của cánh tay xoay quanh khớp và m là khối lượng của cánh tay. Khớp có một lực cản nhớt là c và độ dài động học, khoảng cách giữa trục xoay và C, là l. Giới thiệu một tập hợp biến mới

$$\begin{aligned} \theta &= x_1 \\ \dot{\theta} &= x_2 \end{aligned} \tag{4-194}$$

Chuyển đổi phương trình chuyển động thành

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{Q - cx_2 - mglsinx_1}{I}. \end{aligned} \tag{4-195}$$

Dạng tuyến tính hóa của các phương trình này là:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -mgl/I & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix}. \tag{4-196}$$

Giả sử điểm tham chiếu là

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_d &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q_c &= mgl. \end{aligned} \tag{4-197}$$

Ma trận hệ số trong Phương trình (4-196) sau đó phải được đánh giá tại điểm tham chiếu. Chúng ta sử dụng một bộ dữ liệu mẫu.

$$\begin{aligned} m &= 1\ kg \\ l &= 0.35\ m \\ I &= 0.07\ kg \cdot m^2 \\ c &= 0.01 Ns/m \end{aligned} \tag{4-198}$$

Và tìm

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}_d} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49.05 & -0.01 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{Q}_c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14.286 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4-199}$$

Chúng ta có một hệ thống tuyến tính và có thể áp dụng bất kỳ luật điều khiển nào dành cho các hệ thống tuyến tính. Ví dụ, luật điều khiển PID.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_c - \mathbf{k}_D\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k}_P\mathbf{e} + \mathbf{k}_I \int_0^t \mathbf{e}dt \tag{4-200}$$

Trong đó $$\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} - \boldsymbol{\pi}/\mathbf{2} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix} \tag{4-201}$$

có thể điều khiển cánh tay xung quanh điểm tham chiếu.

Ví dụ 4-27: Điều khiển PD.

Xác định một điều luật điều khiển PD như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= -\mathbf{k_D}\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k_p}\mathbf{e} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{q} - \mathbf{q_d} \end{aligned} \tag{4-202}$$

Áp dụng điều khiển PD cho robot với các phương trình động học như sau

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \end{aligned} \tag{4-203}$$

tạo ra phương trình điều khiển sau:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{k_D}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{d}) - \mathbf{k_P}(\mathbf{q} - \mathbf{q_d}) = \mathbf{0}. \tag{4-204}$$

Điều khiển này là lý tưởng khi $\mathbf{q}_d$ là một vector hằng số liên quan đến một cấu hình cụ thể của robot, và do đó $\dot{\mathbf{q}}_d = 0$. Trong trường hợp này, bộ điều khiển PD có thể làm cho cấu hình $\mathbf{q}_d$ ổn định một cách tổng thể.

Trong trường hợp một đường đi được cho bởi $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d(t)$, chúng ta định nghĩa một bộ điều khiển PD cải tiến dưới dạng

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{d} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{d} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{k_D}\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k_P}\mathbf{e} \tag{4-205}$$

và giảm phương trình vòng kín thành

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} + (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{k_D})\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{k_P}\mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{4-206}$$

Việc tuyến tính hóa phương trình này xung quanh một điểm kiểm soát $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d = \text{const}$ cung cấp một động lực ổn định cho tín hiệu sai số.

$$\mathbf{D}(\mathbf{q_d})\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{k_D}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{k_P}\mathbf{e} = \mathbf{0}. \qquad (4\text{-}207)$$

4.3.4. Bài tập

1. Giải các phương trình đặc tính và xác định phản hồi của các hệ thống bậc hai sau tại $x(1)$, nếu chúng bắt đầu từ $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

a. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$

b. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$

c. $\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$

2. Dùng một luật điều khiển PD được sửa đổi.

$$f = -k_{pe} - k_d\dot{x}$$
$$e = x - x_d$$

đến một hệ thống tuyến tính bậc hai

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

và giảm hệ thống thành phương trình bậc hai trong tín hiệu sai số.

$$m\ddot{e} + (c + k_D)\dot{e} + (k + k_P)e = kx_D$$

Sau đó, tính toán sai số ổn định cho một đầu vào bước.

$$x = x_d = \text{ const }.$$

3. Dùng một luật điều khiển PD được sửa đổi.

$$f = -k_P e - k_d\dot{x} - k_I\int_0^t edt$$
$$e = x - x_d$$

đến một hệ thống tuyến tính bậc hai

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

và giảm hệ thống xuống thành một phương trình bậc ba trong một tín hiệu sai số.

$$m\dddot{e} + (c + k_D)\ddot{e} + (k + k_P)\dot{e} + k_I e = 0$$

Tìm các hệ số PID sao cho phương trình đặc trưng của hệ thống được đơn giản hóa thành

$$(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + \beta) = 0.$$

4. Tuyến tính hóa các phương trình đã cho và xác định độ ổn định của tập hợp các phương trình đã tuyến tính hóa.

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + x_1\cos x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + (1 + x_1 + x_2)x_1 + x_1\sin x_2$$

5. Mở rộng các phương trình điều khiển cho một robot tay máy phẳng 2R sử dụng luật điều khiển sau:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{D(q)}(\ddot{\mathrm{q}}_d - \mathrm{k}_D\dot{\mathrm{e}} - \mathrm{k}_P\mathrm{e}) + \mathrm{H(q,\dot{q})} + \mathrm{G(q)}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R. N. Jazar, Theory of Applied Robotics, London: Springer, 2010.

[2] Đ. V. Hiệp, Kỹ thuật robot, Hà Nội: NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2003.

[3] N. T. Phúc, Robot công nghiệp, Hà Nội: NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2006.

[4] N. T. Thịnh, Kỹ thuật robot, TP. Hồ Chí Minh: Nhà xuất bản quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2014.

[5] N. V. Khang et N. Q. Hoàng, «Chương 13: Mô hình hóa các hệ cơ điện tử,» chez Sổ tay cơ điện tử, Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam, 2020, pp. 470 - 474.

[6] a. S. H. D. D. Jacques, «A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices,» Trans ASME Journal of Applied Mechanics, pp. 215-221, 1955.

[7] D. L. Pieper, The kinematics of manipulators under computer control, Stanford University, 1969.

[8] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani et G. Oriolo, Robotics - Modelling, Planning and Control, Springer, 2010.

[9] N. M. Tiến, Điều khiển robot công nghiệp, Hà Nội: NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2007.

[10] N. V. Tính, P. T. Cát et P. M. Tuấn, «Mô hình hóa và điều khiển robot di động non-holonomic có trượt ngang.,» Tạp chí Khoa học và Công nghệ Việt Nam, vol. 4, n° %11, pp. 1-6, 2016.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Địa chỉ: Phường Tân Thịnh - Thành phố Thái Nguyên - Tỉnh Thái Nguyên
Điện thoại: 0208 3546116; Fax: 0208 3840017
Website: nxb.tnu.edu.vn * E-mail: nxb.dhtn@gmail.com

GIÁO TRÌNH
MÔ HÌNH HOÁ VÀ ĐIỀU KHIỂN ROBOT

Chịu trách nhiệm xuất bản:
TS. PHẠM QUỐC TUẤN
Giám đốc - Tổng biên tập

Biên tập:	HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
Thiết kế bìa:	LÊ THÀNH NGUYÊN
Sửa bản in:	QUÁCH THÙY LINH
Trình bày:	QUÁCH THÙY LINH

Đối tác liên kết xuất bản
TS. Nguyễn Vôn Dim
(Địa chỉ: Trường đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông)

***

Số đăng kí kế hoạch xuất bản: 1304-2025/CXBIPH/1-61/ĐHTN
Số quyết định xuất bản: 24LK-CN/QĐ-NXBĐHTN, ngày 29/4/2025
Nộp lưu chiểu quý II năm 2025
Mã ISBN: 978-604-350-514-6

Không phần nào trong xuất bản phẩm này được sao chép hay phát hành dưới bất kì hình thức hoặc phương tiện nào nếu không được sự cho phép của Nhà xuất bản Đại học Thái Nguyên